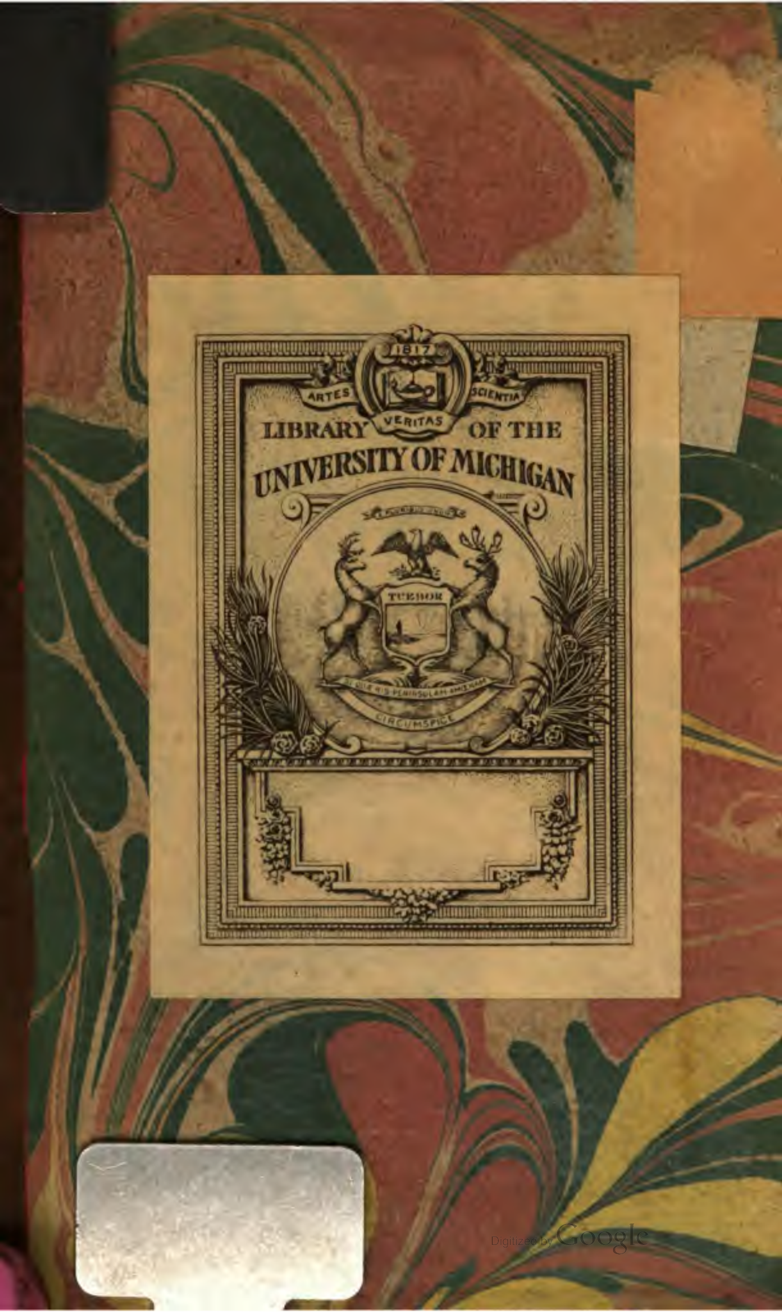

1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



Johann Bernhard Basedows

bewiesene

Grundsätze

der reinen

Mathematik.

Erster Band.

Zahlenkunst und Algebra,

zur Elementarischen Bibliothek.

Leipzig, 1774.

Bey Siegfried Lebrecht Crusius.

Vorrede
zu beyden Theilen.

Dem Elementarwerke dürfen mathematische Arbeiten nicht fehlen. Sie andern Männern, deren Hauptsache sie sind, gänzlich zu überlassen, ist, ohngeachtet alles Nachforschens und Anerbietens, unmöglich gewesen. Ich, der ich mancherley Hindernisse gehabt hatte, in diese Hauptwissenschaften, als in ein Ganzes, zureichende Einsicht zu erwerben, mußte in meinem 49sten Jahre mit unglaublicher Arbeit diesen Mangel ersetzen.

So wurden diese Bücher. Denn man lernt am gründlichsten durch eignes Arbeiten. Und wenns geschehen ist, so ist es sehr natürlich, daß das Werk nach des Verfassers Denkart brauchbar scheine, und daß man es bey guter Gelegenheit drucken lasse. So machen es ja auch andre Professoren und Gelehrte. Sehr löblich ist wohl diese Gewohnheit nicht; aber erträglicher ist sie doch, als manche andre Gewohnheiten der Menschen.

Eine Mathematik, die ein unerfahrner Lehrling, wenn er im Denken noch nicht geübt ist, ohne einen der Sache kundigen Lehrer, sollte bequem brauchen können, ist unmöglich, besonders wenn man nicht viele Mühe und Zeit unnütz verlieren will. Der eigentliche Gebrauch meines Buches bey der angewachsnen Jugend, erfodert einen in diesen Sachen nicht fremden Unterweiser. Für Eltern und solche Lehrer, die erst Anfänger sind, werde ich in dem bevorstehenden praktischen Theile sorgen,

worinnen ich alsdann diese beyde ersten citiren kann. Sie sind die ersten, weil sie zuerst erscheinen. Manche Stücke des Inhalts aber gehören ganz eigentlich zu dem Letzten, was man in einem mathematischen Unterrichte brauchen kann und muß.

Denn meine Absicht gieng auf die ganze reine Mathematik, mitgerechnet etwas Algebra und einen Vorschmack auch der höhern Geometrie und die Lehre vom Unendlichen.

Ich liefere jetzund nur Theorie, und keine Anwendung. Die letzte wird zu ihrer Zeit folgen. Denn ich darf diese, seit einem Jahre gedruckte Arbeit, nicht länger verzögern. Ich werde aber den praktischen Band, welchen ich (wenn ich Muße finde) verspreche, größtentheils nur für die Anwendung der Rechenkunst (nicht der Geometrie) schreiben.

Theorie ist in diesen beyden Bänden für drey Viertheil der studirenden Jünglinge zu viel. Was anfangs, oder auf immer, für Diesen und Jenen weggelassen werden muß, kann der Lehrer, der dies Magazin braucht, nur aus den Umständen beurtheilen.

Ich bin der Meynung, daß (nebst der Aufbewahrung der im Leben brauchbaren Conclusionen in dem Gedächtnisse) die Uebung bis zur Fertigkeit vor allen schweren Demonstrationen vorangehen müsse. Nur der vollkommne Lehrer muß jeden Beweis wissen, weil er, auch die schweren zu erleichtern, oft in den Umständen des Unterrichtes und durch Werkzeug, Mittel findet, die der Schriftsteller nicht voraussetzen durfte. Die Schule und Hofmeisterstube muß z. E. zählbare Dinge bey Tausenden und vielerley Meßzeug haben. Sehn und Nachahmen

nen macht die ersten Begriffe anfangs brauchbarer, als alle Demonstration. Und wenn die Hauptbegriffe und Hauptsätze der Zahlenkunst und Geometrie, nach ihrem Inhalte, nur erst bekannt und durch Wiederholung im Gedächtnisse sind; so wirkt die später folgende und schwere Demonstration das, was sie sonst niemals gewirkt hätte; zu geschweigen, daß die meisten Menschen nur der Kenntniß und nicht der Demonstration zu ihrer Hauptabsicht in der Welt bedürfen.

Wer aber dies ganze Werk mit Demonstration durchgegangen ist, wird sich durch andre Bücher ohne Anstoß selbst zu helfen wissen, wenn er auch solche Höhen erreichen will, davon der tausendste Theil der gelehrten Welt nicht einmal einen Begriff hat.

Ich habe vermuthlich oft den gewöhnlichen Sprachgebrauch der Mathematiker nicht gewußt. Ein Buch eines 49jährigen Anfängers (der aber Zeitlebens viel gedacht hat) muß Sonderbarkeiten haben; zwar mehrentheils in Mängeln, aber vielleicht auch in einigen Vorzügen. Es haben mich gute Kenner auch des Letzten versichert.

Man thut wohl, wenn man vor dem Unterrichte der Jugend, oder ehe man überhaupt das Buch gebraucht, die Druckfehler an ihren Orten ändert, und die grössern Anmerkungen am Rande anführet, damit Zeitverlust und Verdruß, den ich in dieser Sache genug erfahren habe, vermieden werde. Die schädlichen Uebereilungen in der Beweisart, oder in einigen Definitionen, habe ich aufrichtig geändert, wenn ich sie wußte.

Des Herrn Büsch praktisches Buch von diesen Materien (Versuch einer Mathematik, zum

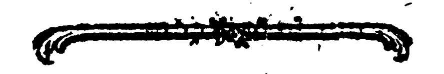
Vergnügen des bürgerlichen Lebens, Hamb. 1771.) bewahrt mich, daß ich durch sehr wichtige Geschäfte gehindert bin, den praktischen Theil, der den Werth des Ganzen verdoppelt hätte (ob ich gleich die Arbeit des Herrn Büsch zum Grunde legen und nicht wiederholen wollte) zu dieser Zeit auszuarbeiten und bekannt zu machen.

Und der Inhalt dieses Theiles war doch das, was mich am meisten reizte, Theorie zu schreiben, weil ich nicht wußte, welches Buch, bey der Menge der guten, ich als das bekannteste, zur Bestätigung des praktischen Vortrages anführen sollte, und weil es mir, nach meiner Denkart und Augenschwäche, fast eben so schwer ist, in einem fremden Buche bewandert zu seyn, als selbst ein ähnliches zu schreiben.

Ich habe gethan, was ich konnte, mit fast unglaublichem Fleisse. In allen übrigen Theilen der Philosophie habe ich seit langer Zeit beständig gewohnt. Durch die Mathematik und Physik aber habe ich nur einmal (wie ein wahrer Freund der Alterthümer und der Künste durch die Hauptstädte Italiens) durchreisen müssen. Ich vermuthe also mit unverstellter Bescheidenheit, daß ich im höhern Grade selber dieser Wissenschaften (wegen der Vollständigkeit des Elementarwerkes) als sie meiner bedurft, und daß diese meine spät geliebten Lieblinge mir eben nichts Sonderbares zu danken haben. Weil ich Wahrheit liebe; so rede ich mit solcher Blödigkeit niemals von meinem Verhältnisse zu irgend einem andern Theile der Philosophie. Der Leser sey mit solcher Aufrichtigkeit zufrieden. Ich bitte darum.

Auf der Reise zu Frankfurt am Mayn, den 16ten September 1774.

Druck-



Druckfehler und Anmerkungen in der Zahlenkunst.

(Anmerk. Wo nichts vor der Zeile steht, zähle sie von oben herunter.)

Seite 14. unten Z. 2. setze das b über dem ersten Strich nach 24.

Seite 15. Z. 3. unten lies §. 3. für §. 7.

— 20. §. 13. Die Lehrsätze dieses Paragraphen sind besser folgendermassen geordnet: 1) Wenn das Product von zwey Zahlen, multiplicirt durch eine dritte, eine vierte Zahl giebt; so heißt die vierte das Product aller dreyen, und die drey heissen allesammt Factoren der vierten. Z. E. 2, 3, 4, sind allesammt Factoren von 24, weil 6 (das Product 2.3) multiplicirt durch 4, die Zahl 24 macht. Man merke hier, daß ein Punct zwischen Zahlen die verlangte Multiplication anzeige. . . . . . 2) Die Grösse des Products zweyer Factoren richtet sich im gleichen Verstande nach der Grösse, sowohl des einen als des andern Factors, so daß, wenn man, welchen von beyden Factoren man will, verdoppeln, verdreyfachen, vervierfachen und so weiter wollte, man auch immer ein zweyfaches, dreyfaches und vierfaches Product erhielte. Z. E. 2.3 ist 6. Und sowohl 4.3, als 2.6 ist 12. Denn man mag die Satz-Zahl, d. i. das Multiplicant, oder die Menge der Setzungen, d. i. den Multiplicator verdoppeln; so ist unmittelbar klar, daß doppelt so viel entsteht, als damals entstanden war, da sowohl das Multiplicant als der Multiplica-

tor einfach waren. — 3) Also, wenn drey Factoren sind, kann man auch den ersten Factor vor das Product der beyden letzten multipliciren. Folglich ist 4.3.2 oder (4.3).2, so viel als 4.(3.2)... 4) Daher ist das Vorige auch eben so viel (§. 12), als (3.2).4 oder als 3.2.4, oder als 2.3.4. Auf solche Art erhellet die Gleichgültigkeit der Versetzung der Factoren, wenn ihrer drey sind. Sind ihrer aber vier, z. E. 2.3.4.5, oder (2.3.4).5; so ist das nach dem Vorigen so viel, als (2.3).(4.5), oder als 2.(3.4.5), oder als 3.4.5.2, u. s. w. So erhellet die Gleichgültigkeit der Versetzung der Factoren, so viel ihrer auch seyn mögen.

Seite 69. Z. 21 und 22, und 71. gleich vor §. 48. verwechsele mit einander, nach der Rechten und nach der Linken.

— 72. in der ersten Columne der Zahlen lies: $4\frac{2}{3}$ für $9\frac{1}{3}$; und lies $1\frac{2}{7}$ für $1\frac{3}{7}$.

— 77. Z. 4. lies: angesehen, für gesehen.

— 80. Z. 1. für 488. M lies 488.

— 104. Z. 1 und 2. lies a : b für a b.

— 105. Z. 7 und 9. lies §. 53. für §. 51. und Z. 12. lies §. 56. für §. 52. weiter unten lies §. 57. für §. 50.

— 108. oben, lies §. 55. für §. 54.

— 113. Z. 1 und 5. lies §. 62. für §. 61. In dem Exempel lies dreymal + 2. für + 3.

— 116. Z. 12. lies $m^n\ m^p$ für $m^n\ n^p$. Und Z. 15. lies $m^{\frac{1}{2}}\ m^{\frac{1}{2}}$ für $m^{\frac{1}{2}}\ m^2$.

— 118. oben Z. 2. lies $n^{2:6}$ für $n^{2\cdot 6}$.

— 125. unten über die 2te Zeile setze §. 66.

— 126. Z. 12. für Y seyn =, setze: seyn.

Seite

Seite 127. Z. 6. für §. 64. lies §. 65.

— 138. Z. 6. für $a^2 + b^2$ setze $2a^2 + 2b^2$. Und Z. 8. lies 5^2 für 5. . . . Von unten Z. 7. lies §. 57. für §. 56. . . . Unten, anstatt: auch das Viertheil des Unterschiedes, lies: auch der Unterschied.

— 139. Z. 5 und 9. lies 60. für 50.

— 140. Z. 12. lies 10 x für 10 y.

— 145. Z. 11. lies: als y^6 für als $= y^6$. Und Z. 6. von unten, lies X für y.

— 146. in der Mitte, für §. 62. No. 6. lies §. 73.

— 148. Z. 2. für §. 62. No. 6. lies §. 73. . . . In Z. 16 und 17. lies a anstatt ay. Z. 19. für — 20. lies — 20 y.

— 150 unten Z. 5. lies x^3 für x.

— 151. oben, lies $-11\frac{1}{4}$ seyn, für $11\frac{1}{4}$ seyn.

— 153. unten Z. 3. für $z = 7$, lies $z = \pm 7$; und für $y = 4$, lies $y = 4$, oder $= -10$. Z. 9. für $z = 7$, lies $z = \pm 7$. Und für $y = 2$ lies $y = 2$ oder $= -12$.

— 167. unten Z. 6. für ub lies 2 u b.

— 170. letzte Z. für $6\frac{2}{3} : 6$, lies $6\frac{2}{3} : 5$.

— 171. Z. 1. lies: kleinere für grössere, und Z. 10. lösch aus welche.

— 171. unten Z. 3. sey die Parenthesis: Nicht nur, als ein ächter Bruch, sondern auch, als Eins.

— 172. unten Z. 5. lies §. 55. für §. 54.

— 173. unten Z. 6. lies §. 85. für §. 84.

— 176. Z. 4. setze nach b und d noch hinzu, c und d.

Seite 183. Z. 1. des §. 96. lies e für l.

— 184. in No. 3. zweymal lies §. 57. für §. 56.

— 187. Z. 1 und 14. lies K für k. Z. 2. lies O für o.

— 189. Z. 3. unten lies e für e m. Von unten Z. 15. lies ununterbrochnen für unterbrochnen.

— 191. unten Z. 4. lies x für z.

— 192. unten Z. 9. lies §. 57, für §. 54.

— 202. Z. 1. bis an §. 104. ändre also: Solche Zahlen haben auch keine Quadratwurzeln unter den ächten Brüchen, (als welches an sich klar ist), auch nicht unter den unächten Brüchen, als welches ich erweisen will. Ich setze voraus, der Bruch $\frac{c}{d}$ sey nicht unter einen geringern Nenner zu bringen, und $\frac{x}{d}$ sey gleichfalls ein ächter Bruch, so, daß $x < d$. Alsdann ist niemals $\frac{x}{d} + \frac{c^2}{d^2} = 1$. Denn es würde folgen, weil $\frac{x}{d} + \frac{d-x}{d} = 1$, daß $\frac{c^2}{d^2} = \frac{d-x}{d}$, oder daß $\frac{c^2}{d} = d-x$; folglich daß $\frac{c}{d} = \frac{d-x}{c}$, wodurch $\frac{c}{d}$ einen kleinern Nenner bekäme. Nun sey t eine Totalzahl; so ist $\left(t + \frac{c}{d}\right)^2 = t^2 + \frac{2tc}{d} + \frac{c^2}{d^2}$ nicht total, weil $\frac{x}{d} + \frac{c^2}{d^2}$ übrig bleibt, deren Summe nicht an 2 reichen, und auch nicht 1 machen kann.

Seite 206. oben Z. 11. für 648 lies 748. Z. 13. lies 1000000 für 14000000. Z. 14. lies $14\frac{2\frac{1}{2}}{1000}$ für $14\frac{2\frac{1}{2}}{14000}$

— 209. unten für §. 81, 82, 83. lies §. 101, 102, 103.

— 210. oben für §. 88. lies §. 97. Und Z. 7. für $3 . 100^2$, lies $3 . 10^2$.

— 211. oben für §. 80, lies §. 99. Und in der Mitte Z. 16. für 371, lies 376.

— 212. unten Z. 7. für $\sqrt[3]{0000}$, lies $\sqrt[3]{1000}$.

— 216. Z. 4. für 3, 4, 2; lies 6, 4, 2.

— 220. in der Mitte für §. 95, lies §. 114.

— 222. unten Z. 13. lies $4\frac{1}{2}$, für $4\frac{1}{4}$. Z. 12. lies §. 116, für §. 96.

— 234. Z. 3. für $\sqrt[m]{z^n}$, lies $\sqrt[m]{e^z}$.

— 239. letzte Z. für + 201, lies + l 201.

— 240. Z. 3. nach 4, setze hinzu ein,

— 241. Z. 5. für 38, lies l 3, 8.

— 255. unten Z. 2. für Lm la, lies Lm lA. Und für La lies lA.

— 259. unten Z. 7. für bis n — 1, lies, bis das letzte Glied.

— 260. unten Z. 11. lösche weg: weil $S^n = \frac{7^n}{4^n . 3^n}$.

— 272. oben Z. 9. für a^{x-n}, lies $a^{x-n} . b^n$.

Für Seite 277, bis S. 280. in der Mitte No. 7. wo viele Druckfehler sind, sey Folgendes:

No. 1)

No. 1) Es sey $(1+y)$ so unbestimmt, daß y auch Nulle oder unendlich klein seyn kann.

No. 2) Es sey Z ein positiver oder negativer, ein totaler oder gebrochner Exponent. Und es soll gemacht werden, die Potenz $(1+y)^z$.

No. 3) Es sollen sich die Coefficienten 1 und B und C u. s. w. so gegen einander verhalten, daß $(1+y)^z = 1 + By + Cy^2 + Dy^3$ u. s. w.

No. 4) Wer etwas von der Differenzialrechnung weis (und nur diesem ist Geom. §. 122 — §. 124. diese Lehre brauchbar und verständlich), der erkennt für gleich die Differenzialen der No. 3. genannten gleichen Grössen. Folglich ist gleich $Z(1+y)^{z-1}dy = Bdy + 2Cydy + 3Dy^2dy$ u. s. w. Also $Z(1+y)^{z-1} = B + 2Cy + 3Dy^2$ u. s. w. Also (nach beyderseitiger Multiplication durch $1+y$) ist $Z(1+y)^z = B + (B+2C)y + (2C+3D)y^2$ u. s. w.

No. 5) Laut No. 3. ist $Z(1+y)^z = Z + ZBY + ZCY^2 + ZDY^3$. Nach No. 4. ist es $= B + (B+2C)Y + (2C+3D)Y^2$ u. s. w. Weil nun y muß Nulle seyn können; so ist $Z = B$. Und $ZB = B + 2C$. Und $ZC = 2C + 3D$, u. s. w. Nun ist nach No. 3. ferner $(1+y)^z = 1 + By + Cy^2$ u. s. w. Also verhält sich die Folge der Coefficienten, 1, B, C, D u. s. w. nach dem binom. Lehrsatze §. 121. No. 14. Und weil, wenn man nach diesem Satze verfährt, auch y^0, y^1, y^2, y^3 auf einander folgen; so ist $(1+y)^z$ (angenommen als $1 + By + Cy^2$) völlig demselben Lehrsatze gemäß, wenn Z auch negativ, oder ein Bruch ist.

No. 6.

No. 6) Wenn y ein Bruch $\frac{b}{a}$ ist und $\left(1+\frac{b}{a}\right)^z$ gemacht werden soll; so setze man allenthalben $\frac{b}{a}$ in der Reihe, wo y steht.

Soll man $(a+b)^z$ machen, welches $a^z\left(1+\frac{b}{a}\right)^z$ ist; so multiplicire man allenthalben die Reihe, die aus $\left(1+\frac{b}{a}\right)^z$ wird, durch a^z. So wird man finden, daß $(a+b)^z$ allezeit eine Reihe nach der gewöhnlichen binomischen Regel gebe.

Aber wenn $Z = -v$ ist; so kann die Reihe $(1+y)^z$ nicht endlich seyn. Denn $(1+y)^{-v}$

$$= \frac{1}{(1+y)^v} = \left(\frac{1}{1+y}\right)^v = \left(1-\frac{y}{1+y}\right)^v = \left(1-y+\frac{y^2}{1+y}\right)^v = \left(1-y+y^2-\frac{y^3}{1+y}\right)^v$$

u. s. w.

Auch kann die Reihe nicht endlich seyn, wenn

$$(1+y)^z = (1+y)^{v:w} = (1+y)^{1-x:w} = \frac{1+y}{1+y^{x:w}} = \frac{1}{(1+y)^{(x:w)-1}} = \left(\frac{1}{1+y}\right)^{(x:w)-1}$$

u. s. w.

Seite 280. Zeile 5. unten für $\frac{2}{3}$, lies $-\frac{2}{3}$. Z. 4. für $+ 9$, lies $+ 45$. Z. 3. lies $3\frac{1}{6}\frac{9}{5}\frac{7}{6}\frac{9}{1}$ für $3\frac{1}{6}\frac{9}{5}\frac{4}{6}\frac{3}{1}$. Am Ende dieser Zeile setze hinzu :=

bey-

Druckfehler und Anmerkungen.

beynahe $8\frac{1}{8}$ = 8, 3. ... Z. 2. lies $3\frac{1}{3}$ für $3\frac{8}{27}$. Anstatt der letzten Zeile setze $(3,3)^3$ = 35,937 = 36 ... = $36 - \frac{1}{16}$ beynahe.

Seite 281. Z. 1. lies $3\frac{1}{16}$ für $3\frac{2}{27}$. Zeile 2. für $\frac{1}{8}$ lies $\frac{1}{16}$.

— 282. Z. 14. man verwechsele die Worte ungerade und gerade.

— 291. Z. 3. für X^{-n} lies X^{p-n}.

— 294. Z. 8. für X — c lies X + c. Z. 17. für X + b lies X + c.

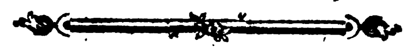
— 306. Z. 15. für 113 > lies 114 <. Z. 17. für zu groß, lies groß genug.

Bewiesene

Bewiesene Lehrsätze
der
Zahlenkunst und Algebra.

Zur
elementarischen
Schulbibliothek.

Anmerkung. Die zwey §. 136. angeführten Figuren stehen, als letzte Figuren in der zu dieser Schulbibliothek gehörigen Geometrie.



Inhalt der Zahlenkunst.

I. Vorgängige Uebungen für Kinder.

II. Addiren, Subtrahiren, Aussprechen und Bezeichnen der Totalzahlen.

III. Multiplication und Division der Totalzahlen.

IV. Von Ganzen, Theilen und Brüchen.

VII. Von (geometrischer) Proportion und Progression.

IX. Von

IX. Von arithmetischer Proportion und Zahlreihe.

X. Von Logarithmen.

I. Vor-



I.

Vorgängige Uebungen für Kinder.

---

§. 1.

Hier sind Rosinen, Mandeln, Pfenninge. Das ist Eins unter den Rosinen, das auch, das auch. Das ist Eins unter den Mandeln, das auch, das auch. Das ist Eins unter den Pfenningen, das auch, das auch. Eins unter den Pfenningen, und das andere Eins unter den Pfennigen, sind gleich benamt. Aber dieß Eins unter den Rosinen, und dieß Eins unter den Pfenningen sind ungleichbenamt. Ich will euch zuweilen mehr Exempel von gleichbenamten und von ungleichbenamten Einheiten geben. Merket: Eins, oder eine Einheit, ist ein jedes Ding in Vergleichung mit andern ihm ähnlichen und gleichbenamten Dingen. Eins, und ein gleichbenamtes Eins zusammen, ist Zwey. Zwey, und ein gleichbenamtes Eins, ist Drey. Auf eben diese Art folgt die ganze Reihe: Eins, Zwey, Drey, bis Hundert. So folgt auch die Reihe von Hundert und Eins, bis Zweyhundert, u. s. w. bis Tausend.

Eins, Zwey, Drey, und ein jedes, was in dieser Reihe darauf folgt, sind Zahlen, weil gleichbenamte Einheiten darinnen sind. Zwey Pfenninge

aber und eine Rosine sind nicht Drey, weder Pfenninge noch Rosinen. Denn sie sind nicht gleichbenamte Einheiten.

Wenn ihr eine Anzahl durchzählet, wie ich euch gelehrt habe, so wollt ihr die rechte Zahl derselben wissen; in dieser Absicht nennet ihr die Zahlwörter nach ihrer Ordnung, und vergrössert jedesmal die schon durchgezählte Zahl um ein Eins, bis ihr alle Einheiten der euch vorgestellten Anzahl durchgezählt habt.

Dieses Durchzählen aber kann auch sprungweise geschehen. Z. E. bey Zehn, als Zehn, Zwanzig, Dreyzig, u. s. w. bis Tausend. So auch bey Zwey, als Eins, Drey, Fünf, u. s. w. oder auch, Zwey, Vier, Sechs, u. s. w. So auch bey Drey, als Eins, Vier, Sieben, oder auch, Zwey, Fünf, Acht, oder auch, Drey, Sechs, Neun. So auch bey Vier, als Eins, Fünf, Neun, oder auch, Zwey, Sechs, Zehn, oder auch, Drey, Sieben, Eilf, oder auch, Vier, Acht, Zwölf. So will ich euch auch bey Fünf, bey Sechs, bey Sieben, bey Acht und bey Neun, sprungweise eine Zahl durchzuzählen üben. Denn bey Zehn könnt ihrs schon. Bey Hunderten ist es auch leicht; auch bey Tausenden.

Wenn ihr bey Fünf zählet: so denkt nur jedesmal den Sprung durch Vier und Eins; bey Sechs, den doppelten Sprung durch Drey; bey Sieben, denselben doppelten Sprung und Eins; bey Acht, den Sprung durch Zehn, und alsdann

alsdann Zwey zurück; bey Neun, den Sprung durch Zehn, und alsdann Eins zurück.

Eine Zahl wird auch oft durch Abgang verkleinert, entweder jedesmal bey Eins, oder bey Zwey, oder bey Drey, u. s. w. Wenn ihr alsdann jedesmal den Rest wissen wollt, so müßt ihr in den Zahlwörtern rückwärts gehen: als Zwanzig, Neunzehn, Achtzehn, u. s. w. Zwanzig, Achtzehn, Sechszehn, u. s. w. Zwanzig, Siebzehn, Vierzehn, u. s. w. Auch darin will ich euch üben, daß ihr von jeder Zahl, die unter Zwanzig ist, auch bey Vier, Fünf, Sechs, Sieben, Acht, Neun, rückwärts abzählen könnt. Leicht ist es, bey Zehn rückwärts zu gehen, als Vierundsechzig, Vierundfünfzig, u. s. w.; auch bey Hunderten, als Fünfhundertvierzig, Vierhundertvierzig, u. s. w. So auch bey Tausenden. Damit ihr eure Uebung nicht verliert, wollen wir in Karten spielen. Zähle jedesmal sprungweise, was jede Karte giebt, zu dem Vorigen hinzu. Zuweilen wollen wir von irgend einer Zahl unter Zwanzig anfangen, und im Rückwärtsgehen durch die Ordnung der Zahlen davon abzählen, was jede Karte giebt.

Hier sind Hundert Pfenninge, in Reihen von Zehn auf den Tisch gelegt. Seht, das sey der erste Pfenning in der ersten Reihe. Weiset mir nun jedesmal, wenn ich euch eine Zahl unter Hundert nenne, geschwind denjenigen Pfenning, der im Durchzählen bis dahin der letzte seyn würde. Z. E. den 25sten, den 87sten, den 39sten, u. s. w.

§. 2.

Ihr wißt, Eins, oder eine Einheit, sey ein jedes Ding unter den gleichbenamten Dingen, und eine Zahl sey ein Inbegriff von gleichbenamten Einheiten. Die ersten Neun Zahlen werden so in ihrer Ordnung geschrieben: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. Eine Nulle (0) bedeutet gar keine Zahl, sondern bedeckt nur die Stelle der Tafel, wo man eine Zahl vermuthen könnte. Doch wenn andere Zahlen weiter nach der linken Hand bey der Nulle stehen, so bedeuten diese Zahlen mehr, als sie ohne angehängte Nulle bedeuten würden. Z. E. die Dreyzahl bedeutet mehr in 30, als ohne Nulle in 3. Diese Zehn Zeichen also, 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. heißen einfache Ziffern, auch wohl einfache Zahlen, auch wohl Zahlen.

§. 3.

Auch eine jede große Anzahl ist Eins unter ihres Gleichen. Denn wie ich zähle ein Pfenning, zwey Pfenning; so kann ich auch zählen ein Dutzend Pfenninge, zwey Dutzend, u. s. w. So auch Mandel, (das ist eine Anzahl von Funfzehn,) Schock, Zehner, Hunderter, Tausender.

Denkt euch eine Menge Zahlen in einer Zeile nebeneinander, $\overset{e}{4}\,\overset{d}{1}\,\overset{c}{3}\,\overset{b}{6}\,\overset{a}{2}$. Die Stelle a heißt die erste, b die zweyte, u. s. w. Die Stelle a heißt auch die niedrigste; die Stelle b höher, die Stelle c noch höher, u. s. w. Die Stelle der Vierzahl ist hier die höchste. Nach einer gewöhnlichen

Regel,

Regel, welche die Decimalregel heißt, wird eine jede Einheit, (folglich auch eine jede Zahl,) die nur eine Stelle höher kömmt, zehnmal so viel, als sie vorher war; oder kurz, sie wird verzehnfacht. Daher bedeutet in 33 die Dreyzahl zur Linken zehnmal so viel, als die zur Rechten. Eben so ist es mit allen Zahlen. In dieser Zeile $\overset{d}{5}\ \overset{c}{1}\ \overset{b}{1}\ \overset{a}{6}$ bedeutet die Einzahl in c zehnmal so viel, als die in b. Die ledigen Stellen, wenn noch Zahlen auf höhern Stellen stehn, werden mit Nullen bedeckt, als 10, oder 100, oder 1000, oder 201, oder 4005, u. s. w.

Daher bedeutet 10 die Zahl Zehn. Denn $\overset{a}{1}$ ist Eins. Also $\overset{b}{1}\overset{a}{0}$ ist Zehn, weil $\overset{b}{1}$ auf der Stelle b steht, und o keine Zahl bedeutet.

Es enthält jede Stelle, worauf nicht eine Nulle, sondern eine andere Zahl steht, eine oder mehr Einheiten: aber die höhere Stelle hat größere Einheiten, deren eine jede 10 Einheiten der nächsten niedrigern Stelle in sich faßt. Darum heissen in der Zeile
h g f e d c b a

Die Einheiten	auf	a	Einer
——	——	b	Zehner
——	——	c	Hunderter
——	——	d	Tausender
——	——	e	Zehntausender
——	——	f	Hunderttausender
——	——	g	Millioner
——	——	h	Zehn-Millioner, u. s. w.

Nun könnt ihr Folgendes leicht einsehen. Erstlich eine einzige Einheit auf der höhern Stelle bedeutet mehr, oder eine grösere Zahl, als alle Zahlen auf den niedrigern Stellen zusammen. Z. E. in 19 oder in $\overset{c}{1}\overset{b}{9}\overset{a}{9}$. Denn 1 in c bedeutet 10 in b, es fehlt also noch 1 in b, um der Einzahl in c gleich zu kommen. Dieser Defect aber wird in der Stelle a nicht ersetzt, weil dieser Defect von 1 in b, 10 Einheiten in a vorstellt, da doch die Stelle a, und jede Stelle höchstens nur 9 Einheiten haben kann, indem 9 die höchste einfache Ziffer ist. Wenn man aber, (der Lehrart wegen,) mehr Einheiten, als 9 auf einer einzigen Zahlstelle anzeigen will; so schliest man ein zwiefaches Zeichen, z. E. (10) (11) (12) zusammen in Klammern ein.

Zweitens, unter zwey Zeilen, worinnen Zahlen nach der Decimalregel stehen, ist die längere, welche mehr Ziffern enthält, auch das Zeichen der grössern Zahl. Wenn sie aber gleich lang sind, das ist, gleichviel Ziffern enthalten, so ist diejenige Zeile das Zeichen einer grössern Zahl, welche (wenn man ordentlich Einer unter Einern, Zehner unter Zehnern, u. s. w. unter einander schreibt, und paarweise vergleicht,) die erste grössere einfache Ziffer (von der Linken nach der Rechten hin,) enthält. Z. E.

Gr. 101	Kl. 321	Kl. 361	Gr. 453262684
Kl. 99	Gr. 521	Gr. 380	Kl. 453163029

§. 4.

§. 4.

Also folgen die geschriebenen Zahlen so aufeinander:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.
61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.	70.
71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
81.	82.	83.	84.	85.	86.	87.	88.	89.	90.
91.	92.	93.	94.	95.	96.	97.	98.	99.	100.

101, u. s. w. 200. 201 ... 299. 300. ... 999. 1000 u. s. w.

In der Zahlenkunst hernach leicht fortzukommen, ist nöthig, daß ihr euch übt, Zahlen so untereinander zu schreiben, daß eure Seulen von oben bis unten nach eurer Vorschrift oder Absicht grade werden. Dieses heißt ordentlich untereinander setzen. Z. E.

```
32105643
    2603
    4123
   2328
      54
      83
  012362
```

II.

Vom Addiren und Subtrahiren, Aussprechen und Bezeichnen der Totalzahlen.

§. 5.

Die Einer, die Zehner, die Hunderter, und die ganze Reihe von Zahlen, enthalten eine gewisse Anzahl von Einern. Denn ein Zehner enthält Zehn Einer; ein Hunderter enthält Zehn Zehner; also enthält ein Hunderter gleichfalls viele Einer, u. s. w.

Aber im Gebrauche der Zahlen, werden unter den Einern allezeit gewisse Dinge verstanden, entweder Pfenninge, oder Haufen von Pfenningen, oder Stücke Tuch, die eine gewisse Grösse haben, u. s. w.

Unter den gleichartigen Dingen, deren ein Jedes seine bestimmte Grösse hat, ist eins entweder dem andern gleich, oder das eine grösser, oder das andere kleiner.

Aber wenn ihr die Grösse solcher Dinge einsehen wollt, müßt ihr (ob ihr gleich ein Jedes auch Eins nennen könnt) dennoch irgend ein solches Ding von bestimmter Grösse vorzüglich wählen, um das Principal-Eins zu heissen. Z. E. einen Groschen. Alsdann ist der Thaler mehr, der Pfenning aber weniger, als euer gewähltes Principal-Eins. So auch, wenn ihr ein Stück Tuch von vielen Ellen euer Principal-Eins, oder 1 nennet,

so ist ein jeder Abschnitt dieses Tuchs, und ein jedes Stück ander Tuch, welches nicht so groß ist, als jenes, in Betrachtung seiner Grösse nicht 1, sondern weniger, als 1; und ein jedes grössere Stück ist mehr, als 1.

Wenn ein jeder Einer in einer Zahlreihe die Principal-Einheit bedeutet: so heißt ein jeder Einer in derselben eine Totaleinheit, und die ganze Zahl heißt eine Totalzahl.

Wenn aber die Einer in einer Zahlreihe etwas kleineres, als die gewählte Principal-Einheit, oder nur ein Theil von ihr, bedeuten: so heissen die in solcher Reihe stehenden Einer, Gebrochene Einheiten, und die ganze Zahl heißt eine gebrochene Zahl, oder ein Bruch. Zerschneidet eine Spielkarte in vier gleiche Theile, oder Vierthel. Diese Viertheil könnt ihr auch zählen. Wenn ihr nun drey solche Viertheil denkt, und vorher die Grösse der ganzen Karte zu eurer Einheit gewählt habt, so ist die Dreyzahl, deren Einheiten Viertheil sind, eine gebrochene Zahl, oder ein Bruch. Ich will aber Anfangs nur die Kunst zeigen, mit Totalzahlen zu rechnen.

§. 6.

Es ist 4 und 3 zusammen 7; die Vierzahl und die Dreyzahl mögen bedeuten, was ihr wollt, wenn es nur gleichbenamte Dinge sind. Man kann aber allemal eine Zahl finden, welche zweyen oder meh-

ten zusammen gleich ist, z. E. 50 und 51 und 3 ist zusammen 104.

e	d	c	b	a	
4	5	0	9	1	die Theile.
	6	2	8	3	
15	3	9	1	2	
			2	6	
19	(14)	(11)	(20)	(12)	die unausgebesserte Summe.
20	5	3	1	2	die ausgebesserte Summe.

Die Summe muß allen Theilen zusammen gleich seyn. Die Seulen a, b, c, d, e, enthalten alle Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, Zehntausender, die in den Theilen sind. Jede Specialsumme in der unausgebesserten Summe, wenn man die auf a als Einer, auf b als Zehner, (u. s. w.) betrachtet, ist ihrer über ihr stehenden Seule gleich, und durch Durchzählen (sprungweise) gefunden. Also ist die ganze unausgebesserte Summe allen Theilen zusammen gleich. Als die gebesserte Summe daraus gemacht wurde, versetzte man diejenigen von den eingeklammerten Zahlen, die es wegen ihrer Decimalbedeutung litten, jedesmal in die nächstfolgende höhere Stelle. Also ist die gebesserte Summe (welche eine ordentliche Zahlreihe nach der Decimalregel ist) ganz gleich der ungebesserten Summe, folglich allen Theilen zusammen, und also die rechte Summe. So müßt ihr allemal verfahren, wenn ihr viele Zahlen als Theile in eine verständlichere gleiche Summe bringen, oder (merkt dieß Wort) addiren wollt,

wollt. Doch ein Geübter (wenn er von der Stelle a zu addiren anfängt) bedarf die ungebesserte Summe nicht zu schreiben; sondern rechnet alsobald die Zehner zu Zehnern, die Hunderter zu Hundertern.

§. 7.

Wenn ihr die Summe und den einen Theil derselben wißt, und den andern Theil sucht, welcher dem bekannten Theile, um der Summe gleich zu werden, fehlt: so heißt der Anfangs unbekannte Theil der Unterschied (auch wohl der Rest) der Summe und ihres bekannten Theiles. Subtrahiren aber heißt den Unterschied der Summe und des Theiles suchen, verständlich ausdrücken, und anstatt der bekannt gemachten Zahlen setzen. Z. E. Ihr sollt von der Fünfzahl die Dreyzahl subtrahiren: sprecht, 5 minder 3 ist (Was denn?) 2. Die Zweyzahl ist der Unterschied; setzet denselben: so habt ihr subtrahirt, und zwar vermittelst eines sprungsweise geschehenen Rückgangs durch die Zahlwörter, dessen ihr schon gewohnt seyd. Es sey a eine grosse in vielen einfachen Zahlen geschriebene Zahl, b gleichfalls. Ihr sollt von der Zahl a die Zahl b subtrahiren. Schreibt beyde Zahlenzeilen ordentlich untereinander. Subtrahirt, von den Einern der Zahl a, die Einer der Zahl b; so von den Zehnern der Zahl in a, die Zehner in der Zahl b, u. s. w. So subtrahirt ihr (wenn ihr nur jedesmal den Special-Unterschied in die rechte Stelle grade darunter setzt, und alle Special-Unterschiede zusammen setzt,) von

von der ganzen Zahl a, die ganze Zahl b. Z. E.

43685 Summe,
2142 Theil,
41543 Unterschied, oder zweiter Theil, oder Rest.

Dieß hat keine Schwierigkeit, wenn niemals in derselben Stelle der Summe die Zahl kleiner ist, als die Zahl des Theiles. Aber seht folgendes Exempel:

edcba
42183 Summe,
1412 Theil,
40771 Unterschied.

Die Einzahl auf der Stelle c in der Summe ist kleiner, als die darunter stehende Vierzahl des Theils. Ihr könnt nicht sagen: 1 minder 4. Aber bereichert die Stelle c (in der Summe) um 10, welches ihr könnt, wenn ihr in der Summe die höhere Stelle d um 1 kleiner macht, und es durch Punctiren anzeigt. Alsdann sprecht: 11 minder 4 ist 7. Eine in der Subtraction punctirte Zahl wird also um 1 kleiner, und die nächste Zahl auf der niedrigern Stelle um 10 grösser angesehen, als ihre Figur anzeigt. Daher wird eine punctirte Einzahl eine Nulle; eine punctirte Nulle aber, welche durch Punctirung einer höhern Stelle 10 ward, wird 9, wie in folgendem Exempel:

60082
3780
56302

Vergeßt aber nicht, wenn die Zahlen der Summe und des Theils gleich sind, in dem Unterschiede eine Nulle zu schreiben, und der Einförmigkeit halber zu sagen: 4 minder 4 (oder überhaupt Z minder Z) ist Nulle. Denn sonst behalten die Specialsummen an den höhern Stellen, bey Auslassung dieser Nulle, die Grösse nicht, die sie nach der Decimalregel haben sollen. Wenn aber in der Summe höhere Zahlstellen besetzt sind, als in dem Theile: so tragt dieselben Zahlen in den Unterschied hinein. Z. E.

412368
345
412023

Es ist klar, daß die Summe des Theiles und des richtig berechneten Unterschiedes, wenn ihr sie beyde addirt, die Summe, von welcher man subtrahirte, gleich ist. Denn der Unterschied ist der Anfangs unbekannte Nebentheil. Addirt man zwey Nebentheile: so findet man ihre Summe.

§. 8.

Nach Römischen Zahlzeichen, welche Buchstaben sind, ist I die Einzahl, oder 1; V ist 5; X ist 10; L ist 50; C ist 100; D ist 500; M ist 1000. Die vielbedeutenden Zahlzeichen stehen voran, die andern folgen. Doch zuweilen steht ein weniger-bedeutendes unmittelbar vor dem mehr-bedeutenden. Alsdann gilt weder das eine noch das andre, sondern ihr Unterschied. Also z. E.

I ist 1

I ist 1	L ist 50
II ist 2	LXXX ist 80
III ist 3	XC ist 90
IV ist 4	C ist 100
V ist 5	CCC ist 300
VI ist 6	D ist 500
IX ist 9	DCCC ist 800
X ist 10	M ist 1000
XIII ist 13	MM ist 2000
XVIII ist 18	CCXL ist 240
XIX ist 19.	MCI ist 1101
XX ist 20	CXIX ist 119
XL ist 40	M DCC LXXII ist 1772

D CCCC LXXXXVIIII ist 999.

Anmerk. Der folgende Paragraph ist verdrießlich, und nur darum schwer. Im Unterrichte der Kinder könnt ihr ihn anfangs auslassen.

§. 9.

Geschriebene Zahlen mit Worten auszusprechen merket folgendes: 1) Die Hunderter werden zuerst, aber im Deutschen die Einer vor den Zehnern ausgesprochen. Daher leset 524 als Fünfhundert, Vier, und Zwanzig. 2) Wenn die Zahllinie mehr, als drey Ziffern hat: so theilt sie von hinten in Classen von 3 Ziffern, z. E. es sey auszusprechen 4 5 3 2 6 7 9. So ist dieß die Theilung, 4|532|679. So werden auch grössere Linien getheilt,

h m

als 24|002|681|321|453. Zwey Classen zusammen machen eine Hauptclasse. Eine jede Hauptclasse bestehet

bestehet also aus zwey Unterclassen. 3) Bezeichnet den zweyten Strich von hinten durch ein m, den vierten durch ein b, wie oben geschehen ist. 4) Alsdann leset von vorne, jede Classe, als wenn sie allein da wäre; aber wenn die erste Unterclasse einer Hauptclasse geendiget ist; oder wenn das Ende einer Classe keinen Buchstaben hat, so sagt das Wort Tausend. Wenn ihr an den mit b bezeichneten Strich kommt, so sagt das Wort Billion. Wenn ihr an den mit m bezeichneten Strich kommt, so sagt das Wort Million. Also leset die oben bezeichnete Zahl auf folgende Art: 24 Billion, 2 Tausend 681 Million, 321 Tausend, 453.

Merket, daß Tausend Tausender eine Million heisset; eine Million Millioner eine Billion; eine Million Billioner eine Trillion, u. s. w. Die Tausender haben noch 3 Ziffern nach der rechten Hand hinter sich, die Millioner aber 6, die Billioner 12, die Trillioner 18, u. s. w.

Wenn euch Zahlen dictiret werden, die ihr durch eine lange Zahllinie schreiben müßtet; so bittet, daß man euch vielmehr die Ziffern nach der verlangten Ordnung nenne.

Man wird euch auch selten Zahlen dictiren, welche an eine Billion hinan steigen. Dictirt man euch aber Zahlen, worinnen nur Hunderter, Zehner und Einer sind: so schreibt sie (§. 7.) nach der Decimalregel. Hört ihr das Wort Tausend: so wißt, daß wenn ihr die gesagte Anzahl der Tau-

sender

fender geschrieben habt, noch drey Ziffern weiter zur rechten Hand nachfolgen müssen. Höret ihr das Wort Million; so wißt, daß wenn ihr die verlangte Millioner geschrieben habt, noch 6 Zahlen nachfolgen müssen. Daher ist nöthig, die Stellen, die nach der Decimalregel ledig bleiben sollen, mit Nullen zu bedecken. Dictirte man euch also 40 Tausend, 100 Millionen; 13 Tausend und 12: so schreibt 40100013012. Denn nach der Abtheilung in Classen hat diese Zahlenzeile folgende Gestalt 40|100|013|012. Eben so verfahrt in andern Fällen.

III.

Von der Multiplication und Division der Totalzahlen.

§. 10.

Aus 1 entstehet 2, 3, 4, 5, u. s. w. durch zweymalige, dreymalige, viermalige, fünfmalige Setzung, u. s. w. denn z. E. 1 fünfmal gesetzt, ist 5.

Wenn anstatt zweyer Zahlen (a, b) eine dritte (c) gefunden und gesetzt werden soll, welche entsteht, wenn man a, (oder einen bestimmten Theil davon) so vielmal setzt, als b Einheiten hat: so heissen die vorigen Zahlen, (nämlich die Zahl a und die Zahl b)

Factos

Factoren, und die Zahl e heißt ihr Product. Das Product, welches aus 4 und 3 entstehet, ist 12; weil die 4, dreymal gesetzt, 12 macht. Das Product einiger Zahlen suchen, und an ihrer Statt setzen, heißt, diese Zahlen durch einander multipliciren. Ihr multipliciret 3 durch 2, wenn ihr 6 setzt.

Sehet folgende Exempel E und e:

	345			
E	345			345 (4
	345		e	1380
	345			
	1380			

In dem Exempel E und in dem Exempel e beyderseits steht unterm Striche das Product, welches kömmt, wenn ihr 345 durch 4 multipliciret. Wenn ihr aber memorirt habt, wie viel jede Zahl, die unter 10 ist, 4 mal gesetzt, durch die Addition giebt: so dürft ihr die Zahlen nicht so untereinander schreiben, wie in E, sondern könnt gleich sprechen (wie in e) 4 mal 5 ist 20 in den Einern, 4 mal 4 ist 16 in den Zehnern, 4 mal 3 ist 12 in den Hunderten. Diese Zeile könnt ihr (wie in der Addition) leicht ausbessern, und die reine Zeile 1380, als das verlangte Product bekommen. Also memorirt zu eurem Nutzen folgende Multiplicationstabelle, oder das Einmaleins.

§. 11.

1	mal	1	ist	1
2	mal	2	ist	4
2	mal	3	ist	6
2	mal	4	ist	8
2	mal	5	ist	10
2	mal	6	ist	12
2	mal	7	ist	14
2	mal	8	ist	16
2	mal	9	ist	18
2	mal	10	ist	20
3	mal	3	ist	9
3	mal	4	ist	12
3	mal	5	ist	15
3	mal	6	ist	18
3	mal	7	ist	21
3	mal	8	ist	24
3	mal	9	ist	27
3	mal	10	ist	30
4	mal	4	ist	16
4	mal	5	ist	20
4	mal	6	ist	24
4	mal	7	ist	28
4	mal	8	ist	32
4	mal	9	ist	36
4	mal	10	ist	40

5	mal	5	ist	25
5	mal	6	ist	30
5	mal	7	ist	35
5	mal	8	ist	40
5	mal	9	ist	45
5	mal	10	ist	50
6	mal	6	ist	36
6	mal	7	ist	42
6	mal	8	ist	48
6	mal	9	ist	54
6	mal	10	ist	60
7	mal	7	ist	49
7	mal	8	ist	56
7	mal	9	ist	63
7	mal	10	ist	70
8	mal	8	ist	64
8	mal	9	ist	72
8	mal	10	ist	80
9	mal	9	ist	81
9	mal	10	ist	90
10	mal	10	ist	100
10	mal	100	ist	1000

§. 12.

§. 12.

Eine Sache einmal gesetzt, das ist, durch 1 multiplicirt, bleibt, wie sie ist. Also 2 multiplicirt durch 1, ist 2. Auch 1 multiplicirt durch 2, ist 2. Und von allen Zahlen ist dieses wahr, daß wenn einer der Factoren 1 ist, der andere das Product wird; ob ich gleich jetzund nur von Totalzahlen, und noch nicht von Brüchen rede.

Wenn wir in einem Falle das Einfache, im zweyten Falle das Zwiefache, im dritten Falle das Dreyfache durch einerley Zahl (z. E. durch 2) multipliciren: so ist das einfache Product des ersten Falles zwiefach da im zweyten, und dreyfach da im dritten, u. s. w. Z. E. 1, 2, 3, jedes multiplicirt durch 2, ist 2, 4, 6. Eben dieses ist wahr, wenn wir eine Zahl zuerst durch eine gewisse Zahl Z, hernach in einem andern Falle durch das Zwiefache der Zahl Z, hernach durch das Dreyfache derselben multipliciren. Z. E. 2, multiplicirt zu verschiednen Zeiten durch 1, 2, 3, giebt die Producte 2, 4, 6. Also ist es in jedem Falle einerley, ob ihr von zwey vorgeschriebnen Factoren den ersten durch den andern, oder den andern durch den ersten multipliciret. Es ist 5 multiplicirt durch 3, so viel, als 3 durch 5 multiplicirt. Denn in beyden Fällen bekommt ihr 15; im ersten Falle nämlich das Fünffache, von 1, multiplicirt durch 3; im zweyten Falle das Fünffache von 3, multiplicirt durch 1; also in beyden Fällen das Fünffache von einerley Sache. Dieser Beweis ist

jedesmal möglich, wenn die Factoren Totalzahlen sind. Der Satz ist zwar auch von Brüchen wahr. Aber davon erst künftig.

§. 13.

Die Zahlen 2, 4, 3, u. s. w. sind allesammt Factoren des letzten Products, wenn ihr das aus 2 durch 4 entstandene Product ferner durch 3 multipliciren sollt. Das letzte Product in diesem Falle ist 24. Verwechselt die Ordnung in diesen 3 Factoren, 4, 3, 2, oder 4, 2, 3, oder wie ihr wollt, und multipliciret. Allezeit folgt zuletzt 24. Nämlich ein jeder Factor, in welcher Ordnung er auch zum multipliciren gebraucht wird, vervielfacht im gleichen Grade etwas, woraus das letzte Product entsteht. Also ist es auch einerley, eine Zahl nach und nach durch 2 Factoren, oder auf einmal durch ihr Product zu multipliciren. Z. E. 2 multiplicirt durch 3, hernach wieder durch 4, ist eben das, als 2 multiplicirt auf einmal durch 12, (weil 12 aus 3 mal 4 erwächst.) Beydes ist 24.

§. 14.

Das Product 1 durch 10, ist 10; das Product 10 durch 10, ist 100; das Product 10 durch 10, durch 10, ist 1000, u. s. w. (vermöge der Decimalregel. Eine Zahl nämlich wird verzehnfacht, oder multiplicirt durch 10, vermittelst Anhängung einer Nulle. Z. E. 2 multiplicirt durch 10, ist 20; 24 durch 10, ist 240; 30 durch 10, ist 300.

Also

Also wenn ihr eine Zahl durch eine höhere Einheit, welche angehängte Nullen hat, (und welche folglich ein Product von so vielen durcheinander multiplicirten Zehnzahlen ist,) multipliciren sollt: so bekommt ihr das Product, wenn ihr die Zahl so lässt, wie sie ist, und eben so viele Nullen anhänget. Z. E. 24 multiplicirt in verschiedenen Fällen durch 10, 100, 1000; ist 240, 2400, 24000.

§. 15.

Die Multiplication der Total-Factoren auszuüben, wird ein Unbedachtsamer auf das Mittel fallen, einen Factor so oft unter einander zu setzen, als der andere Einheiten hat, und alsdann zu addiren. Dieses kann mit erträglicher Mühe auch geschehen, wenn einer der Factoren klein ist, z. E. die Multiplication 357804 durch 5, giebt 1789020, nach folgender Rechnung:

357804
357804
357804
357804
357804
―――――
1789020

Aber wie? wenn der andere Factor nicht 5, sondern 364 wäre? so müßte man 364 Zeilen machen. Und wenns in die Tausende gienge, wie dann? Wir bedürfen also anderer Hülfsmittel.

No. 1. Uebt euch nur erstlich, multipliciren zu können, wenn einer der Factoren unter

Zehn ist. Und dieses könnet ihr, ohne die Zeilen zu schreiben, durch Vorstellung der Addition, die geschehen würde, wenn ihr die Zeilen schriebet, woferne ihr nur die beyden Factoren merkt, und die Tabelle wißt oder aufschlagt. (§. 11.) Ihr bekommt also, wenn ihr 6403 durch 4 multipliciren sollt, eine der folgenden Figuren:

6403 der erste Factor 4 der andre 25612 das Product,	oder um eine Zeile zu sparen,	6403 (4 25612

No. 2. Hat der eine Factor nur eine bedeutende Zahl, und einige angehängte Nullen, z. E. wie der Factor 500: so bedenkt, daß 500 das Product sey von 5 und 100. Multiplicirt also erst durch 5 hernach das Product durch 100, welches letztere (§. 14.) bloß durch Anhängen der Nullen geschicht. Ihr wißt aus dem Vorigen, daß dieses alles seine Richtigkeit habe. Also multipliciret 9821 durch 500, (und in allen ähnlichen Fällen) nach folgenden Formen:

9821 5 | 00 4910500	9821 (500 4910500

No. 3. Sind in beyden Factoren (mehr als eine) bedeutende Ziffern neben einander: so wisset, daß, da ihr den ersten Factor durch den letzten multipliciren, oder den ersten so oft setzen sollt, als der letzte Factor Einheiten hat, daß, sage ich, ihr den ersten Factor durch jeden Theil des an-

andern (nach denen No. 1. und No. 2. gegebenen Regeln) multipliciren, die Specialproducte addiren, und also das ganze Product finden müßt, nach folgender Form:

45326 Factor		45326
1302 Factor		1302
45326(000) aus 1000	oder	90652
135978(00) aus 300		135978(00)
90652 aus 2		45326(000)
59014452 ganzes Product.		59014452

No. 4. In beyden Exempeln ist die Stelle, wo die Einer der Factoren stehen, durchgängig die Stelle der Einer. In dem ersten Exempel steht das Specialproduct aus der (nach ihrer Stelle) höchsten Zahl des letzten Factors oben an; in dem letzten Exempel aber unten. Nämlich, die Ordnung der Theile verändert die Summe nicht. Die Stelle des zweyten Factors, welche eine Nulle hat, giebt kein Specialproduct. Daher sind der Specialproducte nur 3. Doch ein jedes Specialproduct muß so viele Nullen hinter sich haben, als nach No. 2. erfodert werden. Diese Nullen aber, weil sie in der Addition nichts betragen, könnt ihr auch auslassen: als

45326	45326
1302	1302
45326	90652
135978	135978
90652	45326
59014452	59014452

No. 5. Haben die Factoren (es sey eines oder beyde) angehängte Nullen: so achtet Anfangs diese Nullen nicht; sondern multiplicirt, wie ohne dieselben geschehen müßte. Alsdann hängt die versäumten Nullen hinten an das gefundene Product. So ist das gesuchte Product richtig. Es ist z. E. (§. 13.) 300 mal 5000 eben so viel als 3 mal, 100 mal, 5 mal 1000. Und dieses ist eben so viel als 3 mal, 5 mal, 100 mal, 1000. Dieses ist eben so viel als 3 mal, 5 mal, 100000. Und dieses ist eben so viel als 3 mal 5, mit 5 angehängten Nullen; oder als 1500000. Eben dieser Beweis läßt sich in jedem ähnlichen Falle finden, wo Nullen sind. Also, wenn 36700 durch 221; wenn 341 durch 13000; wenn 186000 durch 320 multiplicirt werden sollen: so beobachtet folgende Form, gleich wie in ähnlichen Fällen:

367(00)	341	186|000
221	13(000)	32|0
367	1023	372
734	341	558
734	4433000	59520000
8110700		

Die Stelle der Einer ist in solchen Exempeln diejenige, wo die letzte Nulle des zuletzt gefundenen Products ihren Platz findet.

No. 6. Ihr könnt zuweilen im Multipliciren etwas Raum und Mühe sparen. Z. E. An-

Anstatt 1238
         36

       7428
      3714

      44568

macht man (§. 13.)

 1238 (9

 11142 (4

 44568

§. 16.

Genug von der Multiplication. Aber gesetzt, es sey euch bekannt, 132 sey ein Product, der eine Factor sey 12, und ihr wollet wissen, welches der andre Factor sey, der, durch 12 multiplicirt, das Product 132 hervorbringt, und den ihr irgends worzu brauchen oder festsetzen sollt. In diesen Umständen heißt das Product auch das Dividend; der bekannte Factor heißt auch der Divisor. Und das Dividend durch den Divisor dividiren, ist den unbekannten Factor, welcher alsdann der Quotient heißt, suchen, und anstatt beyder zuerst bekannten Zahlen festsetzen. Ihr seht alsobald ein, daß eine jede Zahl, durch sich selbst dividirt, den Quotienten 1 gebe; denn Z ist, Z mal 1. Imgleichen eine durch 1 dividirte Zahl giebt einen Quotienten, welcher der dividirten Zahl gleich ist, aus derselben Ursache. Daher wird eine Zahl durch die Einzahl weder im Multipliciren noch im Dividiren verändert.

Das Mittel, andre Quotienten zu finden, oder die Division auszuüben, ist, die Multiplication des gegebnen Divisors mit mancherley Zahlen zu versuchen, bis man diejenige findet, durch welche das Dividend hervorgebracht wird, und welche also der verlangte

Quotient ist. Z. E. 132, dividirt durch 12, giebt den Quotienten 11. Denn alle grössere Zahlen, die man versucht, sind zu groß, alle kleinern zu klein; aber 11 multiplicirt durch 12, giebt 132.

Man kann aber den Quotienten, wenn er eine grosse Zahlreihe ist, lange vergeblich suchen, wenn man die Hülfsmittel der Division nicht aus Lehren kennt. Man versuche es, und dividire 364001 durch 65.

§. 17.

Zuerst lernt also voraus sehen, wie viel Ziffern der Quotient haben werde. Zu dem Ende hängt dem Divisor so viel Nullen an, als ihr dürft, wenn er durch die Verzehnfachung in diesem Grade nicht grösser werden soll, als das Dividend ist. So viel Nullen ihr anhängen könnt: so viel Ziffern wird des Quotienten erste Ziffer (die auf der höchsten Stelle steht) hinter sich haben. Denn diese Verzehnfachung durch Nullen (§. 14.) ist eben so gut, als wenn ihr den Divisor durch eine mit so vielen angehängten Nullen versehene hohe Einheit (z. E. durch 10, 100, 1000, 10000) multiplicirt hättet. Daraus seht ihr alsdann, daß ihr den Divisor durch irgend eine Zahl einer so hohen Stelle (aber nicht einer höhern) multipliciren könnt, ohne dessen Product grösser zu machen, als das Dividend ist; und daß also der unbekannte Factor (der Quotient) wirklich eine Ziffer auf einer so hohen Stelle habe. Daraus wißt ihr alsdann, wie viel Ziffern der Quotient haben werde. Nennt die Ziffer der höchsten Stelle h, Die Quoti-

Quotient wird also haben h, oder h i, oder h i k, oder h i k l, u. s. w. Die letzte Ziffer hat Einer, die vorletzte Zehner, u. s. w. Es ist aber h auf dieser Zahl-Stelle die höchste Zahl, welche kein zu grosses Product giebt.

§. 18.

Euer Quotient, den ihr sucht, sey h i k, (§. 17.) Sucht h; macht sein Special-Product durch den Divisor; subtrahirt dasselbe von dem Dividenden. In dem Reste, weil das ganze Dividend aus Special-Producten besteht, wird noch seyn das Special-Product aus i k, durch den Divisor. Sucht i, wie vorher h; macht sein Special-Product durch den Divisor; subtrahirt dasselbe von dem vorigen Reste. In dem neuen Reste wird seyn das Special-Product k durch den Divisor. Sucht k, wie die vorigen Quotiententheile; macht sein Special-Product durch den Divisor. Dasselbe wird (wenn der Divisor dem Dividend angemessen ist) dem Reste gleich seyn. Auf gleiche Art verfährt man, wenn der Quotient auch sehr viele Ziffern hat. Z. E. 1210890 durch 3345.

```
1210890 | 362, oder h, i, k
(3345)  |
1003500 aus h
-------
 207390 erster Rest
 (3345)
 200700 aus i
-------
   6690 zweyter Rest
 (3345)
   6690 aus k.
```

Die

Die Uebung, und ein Rath, der in einem Buche unverständlich ist, wird das Suchen der Quotiententheile sehr erleichtern. Man kann auch nur mündlich erklären, wie folgende Form der Division mit der vorigen im Grunde einerley sey.

```
     86
   20789  |
 1110890  | 362
  334888  |
    3344
     33
  10038
   20070
    6690
```

Es kömmt, in der Mitte des Quotienten, in dieser und jener Stelle alsdann eine Nulle, wenn 1 oder die Einzahl ein zu grosser Quotiententheil in eben derselben Stelle wäre, z. E.

```
27196532 | 6001
 (4532)  |
27192000
--------
    4532
   (4532)
```

Zuweilen bleibt zu allerlezt ein Ueberrest, der kleiner, als der Divisor ist. Davon will ich künftig einmal handeln. (Der Rest, als Zähler, der Divisor, als Nenner, sind nämlich ein Bruch, welcher dem Totaltheile des Quotienten zugefügt wird.) Ein Exempel ist: 179 durch 16.

179

179 | 11 3/16
(16) |
19
16
3 letzter Rest.

Wenn der Divisor eine einfache Ziffer ist: so kann ein Geübter den Quotienten unmittelbar unter das Dividend setzen: als

Divis. 8 | 72.. Divid. | Divis. 8 | 45696 Divid.
9.. Quot. | 5712 Quot.

§. 19.

No. 1. Der Quotient und der Divisor sind Factoren des Dividenden, welches ihr Product ist. Also wenn man das Dividend durch den gefundenen Quotienten dividirt: so kömmt der vorige Divisor. Z. E. weil 8, dividirt durch 2, die Zahl 4 giebt; so giebt 8 dividirt durch 4, die Zahl 2. Und wenn ihr den Divisor und den Quotienten durch einander multiplicirt, so versteht es sich, daß das Dividend wieder hervor komme. Und wenn ihr ein in zwey Factoren zerfallendes Product durch den einen Factor dividirt, so kömmt der andre.

No. 2. Wenn ihr 48 durch 12 dividirt, so kömmt 4; und wenn ihr 48 durch 2, und alsdann den Quotienten wieder durch 6 dividirt, so kömmt auch 4. Die Ursache ist, weil die Zahl 12 in die Factoren 6 und 2 zerfällt werden kann. Ueberhaupt ist es einerley, ob ihr durch eine Zahl auf einmal, oder durch die Factoren, wor-

ein

ein sie zerfällt werden kann, nach und nach dividirt. Dieses als eine durchgängige Wahrheit einzusehn, nennet das Dividend D; die Zahl, wodurch ihr es dividiren sollt, oder den Divisor, nennet R; die Factoren, worein R zerfällt werden kann; nennet m und f; den Quotienten, den ihr sucht, nennet Q. So erkennt ihr Folgendes: D ist, R durch Q multiplicirt, oder das Product von R und Q. Folglich (§. 13.) ist D auch das Product von den 3 Factoren m und f und Q; das ist, von m (als dem einen Factor) und von dem Producte, (§. 13.) das aus f und Q entsteht, (als von dem andern Factor.) Dividirt ihr nun D durch m, was muß kommen? Sonder Zweifel der Factor, der ein Product aus f und Q ist. Dividirt ihr dieses Product der Zahlen f und Q durch f, was muß kommen? Sonder Zweifel der zweyte Factor, oder Q. Also bekommt ihr zuletzt Q, ihr mögt das Dividend D auf einmal durch R, oder (wenn R ein Product aus m und f ist) zuerst durch m, und den Quotienten hernach durch f dividiren. Auf eben diese Weise erkennt ihr auch, daß es einerley sey, ob ihr 24 erst durch 2, hernach durch 6, oder erst durch 6 und hernach durch 2 dividirt; oder überhaupt, es sey einerley, ob ihr eine Zahl, die ihr durch m und f, oder durch ihr Product dividiren sollt, zuerst durch m oder durch f dividirt. Z. E. Eine durch 2 dividirte Sechszig-Zahl, dividirt durch 5, giebt eben sowohl 6, als eine durch 5 dividirte Sechszig-Zahl, dividirt durch 2. Denn (nach den vorigen Benennungen) ist ein durch f vorgängig dividirtes

D,

D, dividirt durch m, eben so wohl ein durch das Product dieser beyden Divisoren dividirtes D, als wenn die vorgängige Division durch m, und die nachfolgende durch f geschehen wäre. Dieses zu wissen, macht euch eine Bequemlichkeit im Rechnen. Z. E. 456192 durch 72.

9) 456192

8) 50688

Quotient = 6336.

No. 3. Aber wenn ihr fürs Erste das vorgeschriebene Dividend und den vorgeschriebenen Divisor durch einerley Zahl dividirt; und wenn ihr hernach die Division des neuen Dividends durch den neuen Divisor fortsetzt: so thut ihr nichts anders, als das erste Dividend durch den zerfälleten ersten Divisor dividiren, wodurch euer gesuchter Quotient nicht verändert wird. Daher, weil 100, dividirt durch 2, die Zahl 50, und weil 10, dividirt gleichfalls durch 2, die Zahl 5 wird: so ist 100, dividirt durch 10, nichts anders, als 50, dividirt durch 5.

§. 20.

Eine Zahl, welche angehängte Nullen hat, dividirt man durch eine hohe Einheit, oder durch 10, durch 100, durch 1000, u. s. w. wenn man eine, zwey, drey Nullen, u. s. w. hinten auslöschet. Denn wenn man eine solche Zahl in zwey Factoren zerfällt: so ist einer der Factoren 10, oder 100, oder 1000, u. s. w. Wenn man

nun

nen Nullen auslöscht, (§. 14.) so bleibt der andere Factor nach. Vermittelst Auslöschung der Nullen wird also eine Zahl dividirt durch eine hohe Einheit, oder durch 10, durch 100, durch 1000, u. s. w. Z. E. 42000, dividirt durch 10, wird 4200. dieses, dividirt durch 100, wird 42.

Wenn sowohl euer Dividend als euer Divisor einige angehängte Nullen hat: so löscht an beyden gleichviel Nullen aus, ehe ihr dividirt. Denn alsdann dividirt ihr beydes durch einerley Zahl, welches (§. 19.) euren gesuchten Quotienten nicht verändert. Daher gleichwie 10, dividirt durch 2, die Zahl 5 ist: so ist auch 1000, dividirt durch 200, nichts anders, als 5.

IV.

Von Ganzen, von Theilen, von gebrochenen Zahlen oder Brüchen.

§. 21.

Groschen und Thaler haben Grössen von einerley Art, nämlich Grössen des Werthes. Die Grösse eines Tages und einer Stunde ist auch von einerley Art, nämlich der Zeitlänge. Ein Schritt und eine Meile gleichfalls, nämlich der Wegeslänge. Aber die Grösse der Tage und die Grösse der Thaler sind nicht von einerley Art.

Wenn

Wenn ihr eine kleine und eine grössre Sache von einerley Art vergleicht, so heißt die Grösse der kleineren ein Theil von der Grösse der grössern, und die grössre Grösse heißt das Ganze dieses Theils. Daher ist eine Stunde ein Theil des Tags, und ein Thaler das Ganze von einem Groschen.

Wenn der Theil mit 2, 3, 4 andern solchen gleichen Theilen zusammen, seinem Ganzen gleich wird, so heißt ein solcher Theil und ein solches Ganze einander angemessen. Angemessene Theile eines Thalers sind 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 Groschen. Denn 24 Eingroschenstücke, 12 Zweygroschenstücke, 8 Dreygroschenstücke, 6 Viergroschenstücke, 4 Sechsgroschenstücke, 3 Achtgroschenstücke, 2 Zwölfgroschenstücke, ein jedes davon ist dem ganzen Thaler gleich. Hingegen 1 Fünfgroschenstück ist zwar ein Theil, aber ein unangemessener Theil von einem ganzen Thaler.

§. 22.

Wenn ihr nun irgend eine Grösse, (z. E. die Grösse einer Meile,) zu eurer Principal-Einheit erwählet, (§. 5.) so heißt eine jede kleinere Einheit, welche ein angemessener Theil der Principal-Einheit ist, eine gebrochene Einheit.

Und wenn die Zahlen 1, 2, 3, 4, u. s. w. gebrochene Einheiten anzeigen, so heißen sie gebrochene Zahlen oder Brüche.

Die gebrochenen Einheiten heißen ein Zweytheil, ein Dritthel, ein Vierthel, — ein Hunderttheil, u. s. w.

Von dem ersten gehören 2, von dem zweyten 3, von dem dritten 4, von dem letzten 100 darzu, ehe sie zusammengenommen 1, das ist eine Total-Einheit, oder die Principal-Einheit ausmachen.

Ein Zweythel ist grösser, als ein Dritthel; ein Dritthel ist grösser, als ein Vierthel, u. s. w.

Etwas, oder eine Zahl vereinfachen, das ist, verzweytheln, verdritthеln, verzehntheln, u. s. w. heißet, an ihrer Statt ihr Zweythel, ihr Dritthel, oder ihr Zehnthel setzen. Setzt man anstatt 10 nur 1, anstatt 50 nur 5: so hat man die Zahl 10 oder 50 verzehnthelt, oder durch Verzehnthelung vereinfacht.

§. 23.

Wenn die Zahl 1 nicht (wie gewöhnlich ist) die Principal-Einheit, sondern eine gebrochene Einheit, ein Zweythel, ein Dritthel, ein Hundertthel bedeutet: so setzt man unter dem 1 eine Zahl, welche anzeigt, von welcher Art die gebrochene Einheit sey, oder wie viele derselben zu einem Ganzen, oder zu dem gewöhnlichen 1 erfodert werden. Z. E. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{100}$, leset: ein **Zweythel**, ein **Dritthel**, ein **Vierthel**, ein **Hundertthel**. So werden auch grössere Zahlen als 1 bezeichnet, wenn sie nicht Total-Einheiten, sondern gebrochene Einheiten enthalten, das ist, wenn sie nicht Total-Zahlen, sondern Brüche sind; z. E. $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{100}$. So kann man auch durch Buchstaben einen Bruch vorstellen. Z. E. $\frac{d}{h}$; denn wenn d ein Dutzend, h Hundert ist: so ist $\frac{d}{h}$ nichts anders, als $\frac{12}{100}$.

Die

Die obere Zahl eines Bruches zeigt die Menge der gebrochenen Einheiten an, durch die untere Zahl aber wird die Art derselben benannt. Daher heißt die obere Zahl der Zähler, die untere Zahl aber der Nenner. In $\frac{3}{4}$ ist 3 der Zähler, 4 der Nenner. Der Zähler in $\frac{d}{h}$ ist d, der Nenner h.

§. 24.

Gleichbenamte Brüche haben gleiche Nenner: als $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{4}$; $\frac{d}{h}$ und $\frac{m}{h}$. Ungleichbenamte Brüche haben ungleiche Nenner, als $\frac{2}{3}$ und $\frac{2}{5}$; $\frac{d}{h}$ und $\frac{d}{m}$.

§. 25.

Es ist $\frac{2}{2}$ ein Ganzes, oder 1. So auch $\frac{5}{5}$, $\frac{100}{100}$, $\frac{a}{a}$ und ein jeder Bruch, dessen Zähler dem Nenner gleich ist. Denn der Nenner zeigt an, wie viel solche gebrochene Einheiten zu einem Ganzen oder zu 1 erfodert werden. Wenn nun der Zähler anzeigt, daß eben so viele hingesetzet sind: so müssen sie zusammen 1, oder ein Ganzes ausmachen.

Daher ist ein jeder von den Brüchen $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{13}{12}$ mehr, als 1. Hingegen $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, weniger, als 1. Die Brüche, nur von der letzten Art, heissen ächt; die andern, die eine ganze Einheit oder mehr enthalten, unächt. Z. E. $\frac{3}{4}$ ist ein ächter Bruch; aber $\frac{4}{4}$, $\frac{7}{4}$ sind unächt.

Unter Brüchen, die gleiche Nenner haben, ist derjenige mehrbedeutend, der den größten

Zähler hat; z. E. $\frac{4}{4}$ ist mehr, als $\frac{3}{4}$. Unter Brüchen, die gleiche Zähler haben, ist derjenige mehr-bedeutend, welcher den kleinsten Nenner hat; z. E. $\frac{3}{4}$ ist mehr, als $\frac{3}{7}$.

Daher wird die Grösse eines Bruchs nicht bloß aus dem Zähler oder Nenner, sondern aus der Grösse des Zählers und aus der Kleinheit des Nenners erkannt.

§. 26.

Sehr merkwürdig ist Folgendes. Ein Bruch ist nichts anders, als der Quotient, welcher kömmt, wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt. Bedenkt nur, was man in der Division der Zahl 12 durch die Zahl 3 thun soll. Man soll anstatt beyder Zahlen ihren Quotienten setzen, oder diejenige Zahl, welche, multiplicirt durch 3, die Zahl 12 macht. Wenn ich also 3 so viel mal setze, als die verlangte Zahl, oder der Quotient, Einheiten hat, so erhalte ich 12. Und durchgängig, wenn ich in Totalzahlen den Divisor so vielmal setze, als der Quotient Einheiten hat: so erhalte ich das Dividend. Also, wenn ich hingegen so viele Einheiten des Dividenden, als der Divisor hat, immer für 1 rechne: so entsteht der Quotient, welcher anstatt des durch den Divisor bezeichneten Dividends gesetzt werden soll. Das Dividend hat also solche Einheiten, wovon so viele, als der Divisor hat, für 1 gerechnet werden müssen. Aber der Zähler eines Bruchs hat auch solche Einheiten, wovon so viele, als der Nenner hat, 1 ausmachen. Also ist die

Be-

Bedeutung eines mit seinem Divisor bezeichneten, und für seinen Quotienten geltenden Dividends, (z. E. 12 dividirt durch 3,) und die Bedeutung eines Bruchs, oder eines mit seinem Nenner bezeichnetan Zählers gleichgültig; (als $\frac{12}{3}$). Daher ist ein jedes mit seinem Divisor bezeichnetes Dividend, dessen Quotient gesetzt werden soll, ein Bruch; und ein jeder Bruch ist ein Quotient; das ist, sein Zähler gilt als ein Dividend, das durch den Nenner dividirt werden soll. Daher, wenn ein Dividend dem Zähler eines Bruchs, und der Divisor jenes Dividenden dem Nenner dieses Bruchs gleich ist, so ist der Quotient jener Division, und die Grösse dieses Bruchs gleich. Aus der Division der Zahl 12 durch 3 kömmt 4; und der Bruch $\frac{12}{3}$ ist auch nichts anders als 4.

§. 27.

Daher gelten von Brüchen keine andere Regeln, als von Exempeln der Division. Was von Dividenden gilt, gilt von Zählern, und umgekehrt. Was von Divisoren gilt, gilt von Nennern, und umgekehrt. Was von Quotienten gilt, gilt von der Grösse der Brüche, und umgekehrt.

Wenn also nach geschehener Division der Totalzahlen von dem Dividenden zuletzt noch ein Theil, welcher dividirt werden soll, und kleiner ist, als der Divisor, übrig bleibt: so gilt dieser Rest als ein Bruch, dessen Nenner der Divisor ist. Daher giebt 9,

 durch

durch 4 dividirt, die Totalzahl 2, und den Bruch $\frac{1}{4}$, oder zusammen $2\frac{1}{4}$. Aus der Division der Zahl 15, durch 6, kömmt $2\frac{3}{6}$. Man frage also nicht, **wie man eine kleinere Zahl durch eine größre dividiren könne.** Sie ist dividirt, wenn man den Divisor, als einen Nenner, darunter setzt, und sie als einen Bruch ansieht.

§. 28.

Am Ende einer Rechnung muß kein unächter Bruch, (§. 25.) z. E. nicht $\frac{14}{4}$, stehen bleiben. Verfahrt mit einem solchen Zähler, wie mit einem Dividenden, (§. 26.) das ist, dividirt ihn durch den Nenner, so **hebet ihr den unächten Bruch auf**, das ist, ihr schafft ihn weg. Alsdann wird $\frac{14}{4}$ verwandelt in $3\frac{2}{4}$, worinnen kein unächter Bruch mehr ist. So auch in allen Fällen.

§. 29.

Wenn ihr eine Zahl Z durch irgend eine andere m multipliciret, und das Product durch dieselbe andere Zahl m dividirt, oder wenn ihr Z durch m erst dividirt, und hernach den Quotienten durch m multiplicirt: so kömmt in beyden Fällen zuletzt die alte Zahl Z wieder hervor. Kurz, **die Multiplication und Division, durch eine und dieselbe Zahl, sind nichtig,** und heben einander auf. Multiplicirt man 3 durch 5, so kömmt 15: dividirt man dieses durch 5, so kömmt wieder 3. Dividirt man 15 durch 5, so kömmt 3: multiplicirt man dieses wieder durch 5, so kömmt wieder 15.

Denn

Denn vermittelst der Multiplication der Zahl Z durch m macht ihr ein Product, dessen ein Factor Z, der andere m ist. Dividirt ihr nun dieses Product durch m: so ist ja der Quotient der andere Factor, oder Z. Imgleichen wenn ihr zu dem Dividend Z und zu dem Divisor m den Quotienten findet: so sind m und dieser Quotient ein Paar Factoren, woraus Z wird. Also kömmt gewiß Z wieder hervor, wenn ihr diesen Quotienten durch m multiplicirt.

§. 30.

Multiplicirt man aber eine Totalzahl durch Z, das ist, durch irgend eine Zahl, und dividirt man das Product (durch Setzung eben derselben Zahl Z, in der Gestalt eines Nenners) durch eben dieselbe Zahl: so wird jene Totalzahl in die Gestalt eines Bruchs verwandelt, welcher (§. 29.) an Bedeutung der Totalzahl gleich ist. Z. E. 4 mal 3, dividirt durch 3, ist der Bruch $\frac{12}{3}$ und doch noch immer 4. Also wenn ein Bruch als ein Nebentheil bey einer Totalzahl steht, z. E. 4 $\frac{1}{2}$ (welches zusammen eine vermischte Zahl genannt wird:) so dürft ihr die Totalzahl durch den Nenner des Bruchs multipliciren, und denselben Nenner als Nenner darunter setzen. Alsdann bekommt ihr anstatt 2$\frac{1}{2}$ die Brüche $\frac{4}{2}$ und $\frac{1}{2}$. Dieses ist noch dasselbe, was ihr vorher hattet. Denn die veränderte Totalzahl ist, weil der Nenner einen Divisor vorstellet, durch dieselbe Zahl multiplicirt und dividirt. In allen Fällen könnt ihr also die Totalzahl zu einem, mit dem

dem dabeystehenden Bruche gleichbenamten, Bruche (§. 24.) auf gleiche Art machen. Diese gleichbenamten Brüche aber werden, wie unten weiter erklärt werden soll, addirt, wenn ihr die Zähler addirt, und den gemeinschaftlichen Nenner darunter setzt. Aus $4\frac{1}{2}$ wird erst $\frac{8}{2}$ und $\frac{1}{2}$, hernach zusammen $\frac{9}{2}$. **Und um also eine vermischte Zahl in einen reinen Bruch zu verwandeln,** müßt ihr die Totalzahl erst in einen Bruch verwandeln, der dem dabeystehenden Bruche gleichnamig ist, hernach die Zähler beyder Brüche addiren, und den gemeinschaftlichen Nenner, als einen Nenner, unter die Summe setzen. Also ist $4\frac{3}{5}$ in einem reinen Bruche $\frac{23}{5}$.

§. 31.

Der Bruch $\frac{50}{100}$ wird, wenn ihr den Zähler und Nenner (§. 20.) durch 10 dividirt, in $\frac{5}{10}$ verwandelt, und ist doch an Bedeutung (§. 19. und §. 27.) nicht verändert. Es ist aber $\frac{5}{10}$ verständlicher, als $\frac{50}{100}$. Wenns also möglich ist, den Zähler und Nenner eines Bruchs durch einerley (ihnen angemessene) Zahl zu dividiren, so bekömmt man einen gleichgültigen verständlichen **Bruch**; z. E. für $\frac{5}{45}$ bekömmt man $\frac{1}{9}$. Man hat nämlich beyderseits durch 5 dividirt. Gemeiniglich nennt man dieses die **Brüche verkleinern**, aber ihre Bedeutung wird dadurch nicht kleiner. So groß, als $\frac{2}{4}$ ist, ist auch $\frac{1}{2}$.

Diesen verständlichern Ausdruck der Brüche zu finden, sind einige Regeln nützlich,

lich, durch deren Hülfe man in manchen Fällen geschwind sehen kann, daß eine gewisse größre Zahl durch eine gewisse kleinere nach und nach ganz genau ausgemessen werde, oder aufgehe. Durch 1 gehen auf alle Zahlen, weil jede Zahl durch 1 dividirt, so bleibt, wie sie ist. — Durch 2 gehen auf alle gerade Zahlen, als 2, 4, 6, u. s. w. — Durch 3 gehen auf alle Zahlen, deren in der Quere addirte Ziffern, oder kürzer, deren Quersumme durch 3 aufgehet, z. E. 126 ist, in der Quere addirt, 9, weil 1 und 2 und 6 die Zahl 9 ausmacht; es gehet also 126 durch 3 auf. — Durch 4 gehen auf alle Zahlen, mit 2 angehängten Nullen, und diejenigen, deren beyde letzte Ziffern in ihrer Bedeutung durch 4 aufgehen; z. E. 500 und 148, weil 48 durch 4 aufgeht. — Durch 5 gehen auf alle Zahlen, deren letzte Ziffer 5 oder eine Nulle ist, als 75 und 120. — Durch 6 gehen auf alle gerade Zahlen, deren Quersumme durch 6 aufgehet, als 174. — Durch 8 gehen auf alle Zahlen mit 3 angehängten Nullen, und diejenigen, deren 3 letzte Ziffern in ihrer Bedeutung durch 8 aufgehen, als 3000, und 1864. — Durch 9 gehen auf alle Zahlen, deren Quersumme durch 9 aufgehet, als 13545, welches in der Quere addirt, 18 macht. — Durch 25 gehen auf alle Zahlen, die 2 Nullen, oder 2 solche Zahlen am Ende haben, die in ihrer Bedeutung durch 25 aufgehen; z. E. 1400 und 23675. — Durch 125 gehen auf alle Zahlen, die 3 Nullen am Ende haben, oder deren 3 letzte Ziffern in ihrer Bedeutung durch 125 aufgehen;

z. E. 6000, und 67375. — Durch 10, 100, 1000, u. s. w. gehen auf alle Zahlen, die eben so viel angehängte Nullen haben. Endlich geht jede Zahl durch sich selbst auf, weil sie, durch sich selbst dividirt, 1 giebt. Man wird alles dieses in der Erfahrung wahr befinden. Der Beweis ist nicht schwer, jedoch weitläuftig und zu meinem Zwecke unnöthig. Was ich gesagt habe, hilft oft die verständlichern Ausdrücke der Brüche ohne viele Mühe finden. Z. E. wenn der Bruch $\frac{3375}{9000}$ vorkömmt: so sieht man, daß der Zähler und Nenner durch 125 dividirt werden können, und daß der Bruch $\frac{27}{72}$, oder $\frac{3}{8}$, darinnen verborgen liege.

§. 32.

Anmerkung. Es ist vielleicht für Manchen nur möglich und nützlich, folgende Operation, ohne Einsicht in den Beweis zu lernen.

Sehet folgendes Exempel:	a	—	oder	—	18000
	b	—	oder	—	10125
	c	—	oder	—	7875
	d	—	oder	—	2250
	1 oder e	—	oder	—	1125

Es ist, wenn ihr dividirt a durch b, der Rest c. Wenn ihr b durch c dividirt, so ist der Rest d. Wenn ihr c durch d dividirt, so ist der Rest e. Wenn ihr d durch e dividirt, so bleibt kein Rest. Wenn in dieser letzten Division noch ein Rest geblieben wäre, so hätte ich dieses Verfahren fortgesetzt, bis kein Rest bliebe. Ich sage, in allen solchen Fällen

len ist das lezte Glied, welches keinen Rest giebt, oder 1, (welches in dem gegenwärtigen Falle e ist) der größte gemeinschaftliche angemeßne Divisor der Zahlen a und b. Z. E. Sowohl 18000 als 10125 geht durch 1125 auf. Zu dem Beweise gehören folgende Sätze:

No. 1. Keine Zahl hat einen grössern angemessenen Divisor, als sich selbst. Der größte angemeßne Divisor von 1 ist 1; von 2 ist 2, u. s. w.

No. 2. Folglich ist e der größte Divisor zugleich von e und von d. Denn daß d auch durch e aufgehe, zeigt der Mangel des Restes.

No. 3. Durch eine solche Zahl, wodurch zugleich der Divisor und der Rest aufgeht, geht auch das Dividend auf. Denn das Dividend heisse p, der Divisor q, der Rest r. Es besteht p aus einer Anzahl von q, und aus einem r. Es wird aber vorausgesetzt, daß sowohl q als r, durch eine gewisse Zahl, (z. E. durch Z) aufgehe. Es gehn also beyde Theile des Dividenden, folglich das ganze Dividend, durch Z auf.

No. 4. Also, da sowohl e als d durch e aufgehn: so geht auch c, das Dividend, dadurch auf; folglich auch sowohl d als c; folglich auch b, als ihr Dividend; folglich auch sowohl c als b; folglich auch a, als ihr Dividend; folglich auch sowohl b als

als a; folglich gehn die beyden ersten Zahlen gewiß auf durch l, (oder in diesem Falle durch e.)

No. 5. Der größte gemeinschaftliche angemeßne Divisor des Restes und des Divisors, ist auch der größte zugleich in Ansehung des Divisors und des Dividenden. Denn (um unsre vorige Benennung No. 3. beyzubehalten) p besteht aus einer Anzahl q und aus einem r. Es muß also, da die Anzahl von q durch Z aufgeht, auch r durch Z aufgehn, weil sonst das ganze p, welches (nebst einer Anzahl von q Zahlen) ein r hat, durch Z nicht aufgehn würde. Also ist der größte dem q und r angemeßne Divisor des r, auch der größte dem q und p angemeßne Divisor.

Also, der größte Divisor des e und d, ist auch der größte Divisor des d und c; des c und b; des b und a; folglich ist, da e (oder l) der größte Divisor des e und d ist, (No. 1.) dieses e auch der größte Divisor der beyden ersten Zahlen a und b. **Folglich findet ihr in jedem Falle den größten Divisor zweyer Zahlen**, durch fortgesetzten Gebrauch des Restes nach der Division, zu der neuen Division des vorigen Divisors, als eines neuen Dividenden, bis kein Rest bleibt; in welchem Falle der letzte Divisor auch der größte gemeinschaftliche angemeßne Divisor der ersten Zahlen a und b ist. Wird nun dieser letzte Divisor 1: so ist der Versuch vergebens gewesen, weil ihr schon vorher wißt, daß ein jedes Paar Zahlen durch 1 aufgeht. Z. E.

115
73 — — Quotient 1
Rest 42 — — Quotient 1
Rest 31 — — Quotient 1
Rest 11 — — Quotient 2
Rest 9 — — Quotient 1
Rest 2 — — Quotient 4
Rest 1 — — Quotient 2

Dieses Mittel könnt ihr in Absicht auf die Verständlichmachung (§. 31.) oder auf die Verkleinerung eines durch grosse Zahlen geschriebenen Bruches versuchen. Wenn aber nicht viel darauf ankömmt, anstatt eines solchen Bruchs einen andern verständlichern, der aber an Werth entweder etwas zu groß oder zu klein ist, zu nehmen: so behaltet nur die erste, oder die 2 erste Zahlen des Zählers, und laßt hinten am Nenner eben so viel Zahlen weg, als ihr am Zähler weggelassen habt. Z. E. $\frac{321645}{1532132}$ ist nicht viel unterschieden von $\frac{32}{153}$ oder von $\frac{3}{15}$ oder von $\frac{1}{5}$. Ihr habt nämlich den Zähler und Nenner durch Weglassung der letzten Zahlen, die ihr als angehängte Nullen anseht, dividirt.

§. 33.

Es ist auch oft, um sich Mühe im Rechnen zu sparen, daran gelegen, zu einigen Zahlen $\left\{\begin{matrix}\text{z. E. } a, b, c, d, e, \\ \text{oder } 4, 7, 16, 35, 56,\end{matrix}\right\}$ das kleinste gemeinschaftlich angemeßne Product, das ist, die kleinste solcher Zahlen, zu finden, die aus einer jeden der vorigen, vermittelst der Multiplication, durch

durch eine Totalzahl entstehen können. Die gesuchte Zahl ist 560.

Anmerkung. Von dieser Regel gilt auch die Anmerkung zu dem vorhergehenden Paragraphen.

Die Regel, eine solche kleinste Zahl zu finden, ist folgende: 1) Schreibt die gegebnen Zahlen nach Ordnung der Grösse, und löscht diejenigen aus, durch welche irgend eine andre, welche stehn bleibt, aufgehet. Denn die ausgelöschten bleiben dennoch, als Factoren in dem Producte, vermittelst der Zahlen, die durch sie aufgehn. 2) Nun merkt bey Seite alle Factoren, woraus die erste oder kleinste der bleibenden Zahlen (z. E. Z) entstehen kann. Dividirt durch diese Factoren so viele der übrigen Zahlen, als ihr könnt. Laßt aber die Zahl Z als unveränderlich stehen, und löscht die zu eurer Nachricht bey Seite geschriebenen Factoren aus. So verfahrt auch mit der folgenden Zahl in Ansehung der weiter hin folgenden, bis ihr Nichts mehr von dieser Art thun könnt. Alsdann macht aus den gebliebenen Zahlen das Product. Auf solche Art dividirt ihr keine Zahl, als nur, wenn der Divisor irgendwo, als Factor des Products, bleibt. Also muß das Product durch jede der anfangs gegebnen Zahlen aufgehn. Und dieses Product ist auch das kleinste, weil, wenn ihr mehr dividirtet, die Divisoren nirgends, als Factoren dieses Products, bleiben würden.

Z. E. 4, 7, 16, 35, 56
wird — — 16, 35, 56
ferner — — 16, 35, 7
ferner — — 16, 35, 1, das Product 560.

§. 34.

Es ist einerley, den Zähler eines Bruchs zu multipliciren, oder den Nenner durch dieselbe Zahl, wodurch man multipliciren will, zu dividiren. Z. E. $\frac{3}{4}$, wenn ihr den Zähler durch 2 multiplicirt, wird $\frac{6}{4}$ oder $1\frac{1}{2}$; wenn ihr den Nenner dividirt, so kömmt $\frac{3}{2}$ oder $1\frac{1}{2}$. Denn in dem letzten Falle wird der Nenner in eben demselben Grade klein, als im ersten Falle der Zähler groß wird, welches (§. 25.) einerley ist, da die Grösse des Bruchs aus der Grösse des Zählers und der Kleinheit des Nenners erkannt wird. Ein andrer Beweis ist dieser: Wenn ihr den Zähler und Nenner eines Bruchs durch gleiche Zahl dividirt: so bleibt seine Grösse (§. 19.) unverändert. Also

$$\left\{\begin{matrix}\text{Zähler} \\ \text{Nenner}\end{matrix}\ \frac{a \text{ multiplicirt durch } b}{c}\right\}$$

$$\text{ist auch}\left\{\frac{a \text{ multipl. durch } b, \text{ dividirt durch } b,}{c \text{ dividirt durch } b.}\right\}$$

$$\text{Dieses ist auch}\left\{\frac{a}{c \text{ dividirt durch } b}\right\}\text{vermöge (§. 29.)}$$

$$\text{Also}\left\{\frac{a \text{ multipl. durch } b}{c}\right\}\text{ ist auch }\left\{\frac{a}{c \text{ div. durch } b}\right\}.$$

Es ist auch einerley, den Zähler eines Bruchs durch eine Zahl zu dividiren, oder den Nenner durch dieselbe Zahl zu multipliciren. Z. E. der Bruch sey

$\frac{8}{15}$ Es ist $\frac{8 \text{ dividirt durch } 2}{15}$ so viel als $\frac{4}{15}$

Und

Und $\frac{8}{15 \text{ mult. durch } 2}$ ist $\frac{8}{30}$ oder (nach §. 19) $\frac{4}{15}$

Der Satz selbst, daß $\frac{a \text{ divid. durch } b}{c}$ so viel sey, als $\frac{a}{c \text{ mult. durch } b}$ ist auch (§. 19.) schon erwiesen, weil es einerley ist, eine Zahl auf einmal durch das Product zweyer Factoren, oder nach und nach durch die Factoren zu dividiren.

§. 35.

Gleichwie die Grösse eines Bruchs unverändert bleibt, (§. 19.) wenn man den Zähler und den Nenner zugleich durch eben dieselbe Zahl Z dividirt, (so daß $\frac{8}{12}$ nichts anders als $\frac{2}{3}$ ist:) so wird auch seine Grösse nicht verändert, wenn man zugleich den Zähler und den Nenner durch Z multiplicirt. Z. E. $\frac{1}{2}$ ist auch $\frac{4}{8}$. Denn der Bruch sey $\frac{a}{b}$. Es ist $\frac{a \text{ mult. durch } Z}{b \text{ mult. durch } Z}$ so viel (§. 34.) als dieser Bruch $\frac{a}{b \text{ mult. d. } Z, \text{ divid. d. } Z,}$ oder als $\frac{a}{b}$ (§. 29.)

§. 36.

Es ist oft nöthig, ungleich benamte Brüche gleichbenamt zu machen, oder zu einem Nenner zu bringen. Z. E. $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$. Dieses zu thun, mul-

multiplicirt man alle Nenner, so viel ihrer sind, durcheinander. Ihr Product heisse N, welches in diesem Falle 12 ist. Nun dividirt man N durch den Nenner des einen Bruchs, und multiplicirt seinen Zähler durch den Quotienten. Diesem neuen Zähler giebt man N zum Nenner. So verfährt man mit allen Brüchen, die man zu einem Nenner bringen will. Hierdurch hat man den alten Zähler und den alten Nenner des Bruchs durch einerley Zahl multiplicirt, und also (§. 35.) des Bruchs Grösse nicht verändert. Z. E. $\frac{1}{3}$ wird alsdann $\frac{4}{12}$, und $\frac{1}{4}$ wird $\frac{3}{12}$.

Die Form ist

12)	
$\frac{1}{3}$	4
$\frac{1}{4}$	3

So auch

36)	
$\frac{1}{2}$	18
$\frac{2}{3}$	24
$\frac{5}{6}$	30

Die Brüche des letzten Exempels würden also

$\frac{18}{36}$, $\frac{24}{36}$, $\frac{30}{36}$.

Allein je kleiner der Generalnenner ist, desto verständlicher sind die Brüche. Also anstatt alle Nenner durcheinander zu multipliciren, sucht man (§. 33.) das kleinste gemeinschaftliche Product derselben, welcher der Generalnenner seyn kann, und verfährt alsdann, wie zuvor. Z. E.

6)		das ist
$\frac{1}{2}$	3	$\frac{3}{6}$
$\frac{2}{3}$	4	$\frac{4}{6}$
$\frac{5}{6}$	5	$\frac{5}{6}$

So auch

120)		das ist
$\frac{3}{8}$	45	$\frac{45}{120}$
$\frac{5}{12}$	50	$\frac{50}{120}$
$\frac{7}{15}$	56	$\frac{56}{120}$

§. 37.

Man addirt gleichbenamte Brüche, wenn man die Zähler addirt, den Nenner unter die Summe setzt; den Bruch, wenn er unächt ist, aufhebt, (§. 28.) und, wenn es geschehen kann, (§. 31.) ihn verständlicher macht. Exempel:

$\frac{5}{12}$	$14\frac{7}{12}$	$\frac{6}{12}$
$\frac{7}{12}$	$3\frac{5}{12}$	$\frac{9}{12}$
$\frac{12}{12}$ oder 1	18	$\frac{15}{12}$ oder $1\frac{3}{12}$ oder $1\frac{1}{4}$

Man addirt ungleichbenamte Brüche, nachdem man sie (§. 36.) zu einem Nenner gebracht hat.

$\frac{1}{2}$	ist	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{16}{24}$	$563\frac{2}{7}$		$\frac{36}{126}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{4}$	sind	$\frac{18}{24}$	$15\frac{5}{6}$	sind	$\frac{105}{126}$
	$\frac{5}{6}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{15}{24}$	$10\frac{2}{9}$		$\frac{28}{126}$
			$\frac{49}{24}$ oder $2\frac{1}{24}$			588		$\frac{169}{126}$
						589		$\frac{43}{126}$

Man subtrahirt gleichbenamte Brüche durch Subtraction der Zähler mit Beybehaltung des gemeinschaftlichen Nenners, wobey es zuweilen (nämlich, wenn der kleinere Bruch der Totalsumme anhängt) nöthig ist, eine Einheit der Totalsumme (§. 30.) in einen gleichnamigen Bruch zu verwandeln, und in Gedanken dem kleinern Bruche zuzufügen, welches man durch Punctirung der Totalsumme (§. 7.) anzeigt. Z. E.

$\frac{5}{8}$	$\dot{1}9$	$\dot{9}\dot{0}\frac{3}{7}$
$\frac{3}{8}$	$5\frac{2}{3}$	$11\frac{5}{7}$
$\frac{2}{8}$ oder $\frac{1}{4}$	$13\frac{1}{3}$	$78\frac{5}{7}$

Man

Man subtrahirt ungleichbenamte Brüche, nachdem man sie zu einem Nenner gebracht hat. Z. E.

$\frac{1}{3}$	$3\frac{5}{6}$	$100\frac{4}{9}$
$\frac{1}{4}$	$2\frac{3}{8}$	$12\frac{5}{6}$
$\frac{1}{12}$	$1\frac{11}{24}$	$87\frac{11}{18}$

Diese Regeln bedürfen keines Beweisses. Denn gleich wie 5 Dutzend, addirt mit 2 Dutzend, 7 Dutzend sind: so sind $\frac{5}{4}$ und $\frac{2}{4}$ zusammen $\frac{7}{4}$. Und gleich wie, wenn ich von 6 Dutzend 1 Dutzend subtrahire, 5 Dutzend bleiben: so wird $\frac{6}{7}$, weniger $\frac{1}{7}$, nichts anders, als $\frac{5}{7}$.

§. 38.

Der Bruch $\frac{1}{2}$, zweymal gesetzt, oder durch 2 multiplicirt, wird $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$, oder $\frac{2}{2}$, oder 1. Der Bruch $\frac{2}{5}$, multiplicirt durch 3, wird $\frac{2}{5}$ und $\frac{2}{5}$ und $\frac{2}{5}$, zusammen $\frac{6}{5}$ oder $1\frac{1}{5}$. Also, wenn ihr einen Bruch durch eine Totalzahl multipliciren sollt: so multiplicirt den Zähler, und behaltet den Nenner.

Sollt ihr eine Totalzahl durch einen Bruch multipliciren: so verfahrt, wie zuvor. Z. E. 2 multiplicirt durch $\frac{1}{2}$, ist $\frac{2}{2}$ oder 1. Und 3, multiplicirt durch $\frac{2}{5}$, ist $\frac{6}{5}$ oder $1\frac{1}{5}$. Denn in diesem Falle sollt ihr (vermöge des Begriffs von der Multiplication (§. 10.) von der Totalzahl denjenigen Theil, welchen der Nenner des Bruchs anzeigt, so oft setzen, als gebrochne Einheiten im Bruche sind. Also wird 3, in der Multiplication durch $\frac{2}{5}$, in sein

 Fünf-

Fünfthel, das ist, in $\frac{2}{5}$ verwandelt, (§. 22, 23.) und alsdann zweymal gesetzt, oder durch 2 multiplicirt, folglich zuletzt $\frac{4}{5}$. Daraus erhellet zugleich, daß wenn einer der Factoren ein Bruch ist, die verwechselte **Ordnung der Factoren** so gleichgültig sey, als (§. 12, 13.) bey Totalzahlen. Sehet die Fortsetzung von Multiplication der Brüche (§. 40.) weiter unten.

§. 39.

Ihr dürft (ohne daß dadurch die Bedeutung dessen, was ihr schreibt, verändert wird) einer jeden **Totalzahl die Gestalt eines Bruchs geben, wenn ihr 1, als den Nenner, darunter setzt.** Z. E. 1, 2, 3, 4, ist $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$, u. s. w. Denn betrachtet einmal den Nenner, als Divisor. Wie viel ist 5, dividirt durch 1, oder überhaupt eine Zahl Z, dividirt durch 1? Sonder Zweifel im ersten Falle 5, im andern Falle Z. Eben so dürft ihr eine Zahl, **als ihr eigen Product durch 1** betrachten und bezeichnen. Z. E. 1 ist 1, multiplicirt durch 1. Und 2 ist 2, multiplicirt durch 1. Und a ist a, multiplicirt durch 1.

In Ansehung des Bruchs $\frac{2}{3}$ ist $\frac{3}{2}$, in Ansehung des Bruchs $\frac{1}{2}$ ist $\frac{2}{1}$, in Ansehung des Bruchs $\frac{2}{1}$ ist $\frac{1}{2}$ der **umgekehrte Bruch**, oder die **umgekehrte Zahl.** Und so in allen Fällen.

Gewöhnt euch (denn es wird euch nützen) die andre Zahl, die durch Umkehrung der ersten entsteht, **die Kleinheit** der ersten Zahl zu nennen. Die

Klein-

Kleinheit von $\frac{2}{3}$ ist $\frac{3}{2}$; die Kleinheit von $\frac{a}{b}$ ist $\frac{b}{a}$; die Kleinheit von $\frac{1}{2}$ ist $\frac{2}{1}$ oder 2; die Kleinheit von 2 oder von $\frac{2}{1}$ ist $\frac{1}{2}$; die Kleinheit von a, oder von $\frac{a}{1}$ ist $\frac{1}{a}$; die Kleinheit von $\frac{1}{a}$ ist $\frac{a}{1}$ oder a. Wundert euch hiebey nicht, daß die Kleinheit mancher Zahl eine grössere Zahl ist, als sie selbst. Denn je kleiner eine Zahl ist, desto grösser ist ja ihre Kleinheit. Daher ist die Kleinheit des Bruchs $\frac{1}{2}$ der Bruch $\frac{2}{1}$ oder die Zahl 2.

Nun merkt fürs Erste von Divisoren, welche Totalzahlen sind, dieses: **es ist einerley, eine Zahl durch eine andre dividiren, oder sie durch die Kleinheit der andern multipliciren.** Denn 12 dividirt durch 3, ist $\frac{12}{3}$; und 12, multiplicirt durch die Kleinheit der Dreyzahl, oder durch $\frac{1}{3}$, ist (§. 38.) auch $\frac{12}{3}$. Die Zahl a, dividirt durch b, ist $\frac{a}{b}$; dieselbe Zahl a, multiplicirt durch die Kleinheit der Zahl b, (oder der Zahl $\frac{b}{1}$) ist a, multiplicirt durch $\frac{1}{b}$, oder gleichfalls $\frac{a}{b}$. Bald werdet ihr einsehn, daß dieser Satz von allen Zahlen und Brüchen gelte.

Daher wird eine jede Zahl, **in der Multiplication durch ihre eigne Kleinheit, in 1 verwandelt.** Denn 4, multiplicirt durch $\frac{1}{4}$, ist $\frac{4}{4}$ oder 1. Also durchgängig z, multiplicirt durch $\frac{1}{z}$, ist $\frac{z}{z}$ oder 1.

§. 40.

Nun können wir mit der Lehre von der Multiplication und Division der Brüche bald fertig werden.

No. 1. Ihr wißt einen Bruch durch eine Totalzahl (§. 38.) zu multipliciren. Der Bruch $\frac{2}{3}$, multiplicirt durch 6, wird der unächte Bruch

$$\frac{\text{(Zähler) } 2, \text{ multiplicirt durch } 6,}{\text{(Nenner) } \ldots\ 3} \text{ oder } \frac{12}{3}.$$

Und überhaupt $\frac{a}{b}$, multiplicirt durch c, wird $\frac{a\,(\text{m. d.})\,c}{b}$

Was würde aber kommen, wenn ich den Bruch $\frac{16}{3}$ durch 4 dividirte? Antwort: entweder $\frac{16 \text{ div. durch } 4}{3}$ oder $\frac{16}{3\,(\text{mult. durch})\,4}$; weil es (§. 19.) einerley ist, eine Zahl auf einmal durch ein Product, oder nach und nach durch die Factoren desselben, zu dividiren.

No. 2. Aber nun bedenkt auch, daß es einerley sey, (wenn nur die Zahlen festgesetzt bleiben) eine Zahl entweder durch eine vorgängige Multiplication und nachfolgende Division; oder durch die vorgängige Division und nachfolgende Multiplication zu verändern, weil die Division durch eine Zahl (§. 39.) eine Multiplication durch ihre Kleinheit ist, und weil (§. 12, 13.) die Ordnung der Factoren im Gebrauche verwechselt werden darf. Daher ist 12, dividirt durch 2, multiplicirt durch 6; eben so viel, als

als 12, multiplicirt durch 6, dividirt durch 2: oder als 12, multiplicirt durch die zuvor durch 2 dividirte 6. In allen Fällen kömmt 36.

No. 3. Nun also, wenn 2 Factoren, die durch einander multiplicirt werden sollen, beyderseits Brüche sind, z. E. $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{8}$: so sollt ihr den einen Zähler 3, vermittelst der Division durch 8, und vermittelst der Multiplication durch $\frac{2}{5}$ verändern. Thut das letzte (No. 2) zuerst, und das Erste zuletzt, so kömmt (nach No. 1.) der Bruch $\frac{2\,(\text{m. d.})\,3}{5}$, der aber noch, vermittelst der Division durch 8 dividirt, und also (nach No. 2.) in den Bruch $\frac{2\,(\text{m. d.})\,3}{5\,(\text{m. d.})\,8}$, also in $\frac{6}{40}$ oder $\frac{3}{20}$ verwandelt werden soll. **Also, um einen Bruch durch einen Bruch zu multipliciren**, macht man das Product der Zähler, und setzt es als den Zähler, und ferner macht man das Product der Nenner; und setzt es als den Nenner desjenigen Bruchs, welcher das Product beyder Factoren ist. Z. E. $\frac{1}{2}$ multiplicirt durch $\frac{1}{4}$, ist $\frac{1}{8}$; und $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$, ist $\frac{3}{8}$; und $\frac{3}{8}$ durch $\frac{5}{6}$, ist $\frac{15}{48}$ oder $\frac{5}{16}$. Und $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ ist $\frac{a \text{ durch } c}{b \text{ durch } d}$. Dasselbe ist auch wahr, wenn ihr mehr Brüche, als 2, z. E. $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$, u. s. w. durch einander multipliciren sollt. Das Product aller Zähler ist der Zähler, das Product aller Nenner ist der Nenner des letzten Products aller dieser Brüche.

No. 4. Eine andre Art, denselben Satz zu beweisen, ist folgende: Ein jeder Bruch ist ein Product seines Zählers durch die Kleinheit des Nenners. (§. 25, 39.) **Wenn ihr also irgend eine Zahl durch einen Bruch multipliciren sollt:** so multipliciret sie durch diese Factoren des zerfällten Bruchs, nämlich durch seinen Zähler, und durch die Kleinheit des Nenners; das ist, multiplicirt sie durch den Zähler; und (§. 39.) dividirt das Product durch den Nenner; oder (mit veränderter Ordnung) dividirt sie durch den Nenner, und multiplicirt den Quotienten durch den Zähler. Erinnert euch aber, welches schon erwiesen ist (No. 1.), daß die Division eines Bruchs durch die Multiplication seines Nenners geschehe. Also $\frac{9}{16}$ multiplicirt durch $\frac{2}{3}$, ist $\frac{9}{16}$, multiplicirt durch 2, dividirt durch 3, oder $\frac{18}{48}$, oder $\frac{3}{8}$.

Anmerkung. Ihr dürft auch, um einen Bruch m, durch einen Bruch n zu multipliciren, den Zähler des m durch den Nenner des n, und den Nenner des m, durch den Zähler des n dividiren, und jenen Quotienten als den Zähler, diesen als den Nenner hinsetzen: so habt ihr auch das Product beyder Brüche, weil ihr (§. 34.) etwas gethan habt, was der gewöhnlichsten Art der Multiplication gleich gilt. Z. E. $\frac{9}{16}$, multiplicirt durch $\frac{2}{3}$, ist

$$\frac{9 \text{ dividirt durch } 3}{16 \text{ dividirt durch } 2}, \text{ oder } \frac{3}{8}.$$

Anmerkung. Hütet euch, Brüche, deren Zahlen nicht genug gekleinert sind, (§. 31.) durch einander zu multipliciren, damit ihr euch nicht überflüssige Mühe macht. Z. E. Wozu diente es wohl, $\frac{48}{98}$ durch $\frac{7}{21}$ zu multipliciren? Es käme $\frac{336}{2058}$, ein Bruch, welcher in

kleinen

kleinen Zahlen $\frac{1}{6}$ ist. Dieß findet ihr leichter, wenn ihr erst den kleinsten Ausdruck der Factoren wählt, nämlich $\frac{1}{2}$ anstatt $\frac{4}{8}$, und $\frac{1}{3}$ anstatt $\frac{7}{21}$.

§. 41.

Sind die Factoren, welche multiplicirt werden sollen, vermischte Zahlen, das ist, haben einer oder beyde nebst der Totalzahl einen angehängten Bruch, wie $2\frac{3}{4}$ und 5, oder $2\frac{1}{8}$ und $8\frac{1}{3}$: so muß man (da nach dem Begriffe von der Multiplication ein jeder Theil des einen Factors durch jeden Theil des andern Factors multiplicirt werden soll) jeden Totaltheil des einen Factors und den Bruch desselben, sowohl durch einen jeden Totaltheil, als durch den Bruch des andern Factors, multipliciren. Z. E.

$2\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{8}$
5	$8\frac{1}{3}$
10	16
.. $\frac{15}{4}$	.. $\frac{8}{8}$
$10\frac{15}{4}$ oder $13\frac{3}{4}$	.. $\frac{2}{3}$
	.. $\frac{1}{24}$
	$17\frac{17}{24}$

Oder man kann die vermischten Zahlen erst in reine Brüche verwandeln, (§. 30.) und alsdann multipliciren. Z. E.

$5\frac{3}{4}$ | oder $\frac{23}{4}$
m. d. $7\frac{2}{5}$ | m. d. $\frac{37}{5}$ } ist das Product $\frac{851}{20}$ oder $42\frac{11}{20}$.

§. 42.

Wenn in der Division das Dividend, oder der Divisor, ein Bruch ist: so dividirt man, mit Beybehaltung des Nenners, den Zähler, wenn derselbe durch den Divisor aufgeht. Sonst, und folglich in den meisten Fällen, multiplicirt man, mit Beybehaltung des Zählers, den Nenner, welches (§. 34.) einerley ist. Z. E. $\frac{8}{15}$ dividirt durch 2, ist $\frac{4}{15}$, oder $\frac{8}{30}$, welches auch $\frac{4}{15}$ ist. Daß aber die erste Art zu dividiren richtig sey, erhellet, weil, wenn ihr, in der Division des Bruchs $\frac{a}{b}$ durch c, den Bruch $\frac{a \text{ div. durch } c}{b}$ machet, und denselben hernach wieder durch c multipliciret, weil, sage ich, das c, welches alsdann in dem Zähler sowohl ein Divisor als ein Factor ist, (§. 29.) wegfällt, und der ursprüngliche Bruch $\frac{a}{b}$, oder das Dividend wieder hergestellt wird. Die zweyte Art der Division eines Bruches aber stimmt mit der ersten überein, weil die Multiplication des Nenners, und die Division des Zählers (§. 34.) gleichgültig ist.

Ist das Dividend eine vermischte Zahl, (z. E. $6\frac{9}{10}$), so müßt ihr denjenigen zweyten Factor suchen, welcher, multiplicirt durch den Divisor, (z. E. durch 3) dem aus zweyen Theilen bestehenden Dividenden gleich ist, das ist, welcher durch c multiplicirt

tiplicirt, nebst dem Totaltheile des Dividenden auch den Bruch desselben hervorbringt. Daher besteht euer Quotient aus zweyen Theilen, und ist die Summe der zweyen Quotienten, 6, dividirt durch 3; und $\frac{9}{10}$, dividirt durch 3. Das ist, ihr müßt jeden Theil des Dividenden dividiren, und die Quotienten zusammen setzen; da überhaupt in der Division des Ganzen ein jeder Theil dividirt wird. Also $6\frac{9}{10}$ dividirt durch 3, ist 2, nebst $\frac{3}{10}$, oder nebst $\frac{9}{30}$, welches auch $\frac{3}{10}$ ist. Doch ihr könnt das Dividend auch vorher (§. 30.) in einen reinen Bruch verwandeln. Z. E. $6\frac{9}{10}$, oder $\frac{69}{10}$, dividirt durch 3, ist $\frac{69}{30}$, oder $\frac{23}{10}$, oder $2\frac{3}{10}$.

Ist der Divisor ein Bruch, so besteht die Division in der Multiplication des Dividenden durch die Kleinheit des Divisors, das ist, (§. 39.) durch den umgekehrten Divisor. Z. E. 4, dividirt durch $\frac{1}{3}$, ist 4, multiplicirt durch $\frac{3}{1}$ oder durch 3; folglich 12. Und $\frac{1}{2}$, dividirt durch $\frac{1}{3}$, ist $\frac{1}{2}$, multiplicirt durch $\frac{3}{1}$ oder durch 3; folglich $\frac{3}{2}$ oder $1\frac{1}{2}$. Und $4\frac{1}{2}$, dividirt durch $\frac{5}{6}$, ist $\frac{9}{2}$, multiplicirt durch $\frac{6}{5}$; folglich $\frac{54}{10}$ oder $5\frac{2}{5}$. Die Richtigkeit dieses Verfahrens einzusehn, müßt ihr bedenken, daß der Zähler des Divisors durch seinen Nenner dividirt sey: (§. 26.) und daß eine Division des Divisors, einer Multiplication des Dividenden gleich gelte. (§. 34.) Folglich giebt die Division der Zahl a durch $\frac{b}{c}$, den Bruch $\frac{a}{b \text{ div. durch } c}$, oder $\frac{a \text{ multipl. durch } c}{b}$,

oder

oder die Zahl a multiplicirt durch $\frac{c}{b}$, das ist, durch die Kleinheit des Bruchs $\frac{b}{c}$, welcher der Divisor ist. **Also ist in allen Fällen die Division durch einen Divisor, eine Multiplication durch seine Kleinheit. Diesen bequemen Ausdruck werde ich häufig brauchen.**

Anmerkung. „Doch da die Multiplication des Zählers durch eine gewisse Zahl, der Division des Nenners „durch dieselbe Zahl; und da die Division des Zählers der „Multiplication des Nenners durch dieselbe Zahl gleich „gilt (§. 34.): so wählet in einzelnen Fällen eine Art „des Verfahrens vor der andern, die euch unbequemer oder „mühsamer wäre. Z. E. $\frac{9}{16}$ soll dividirt werden durch $\frac{3}{8}$. „Weil hier der erste Zähler durch den zweyten Zähler, der erste Nenner durch den zweyten Nenner aufgeht: so macht man den Quotienten $\frac{9 \text{ dividirt durch } 3}{8 \text{ dividirt durch } 2}$ oder $\frac{3}{2}$ oder $1\frac{1}{2}$.

Wenn der Divisor eine vermischte Zahl ist: so verwandelt sie vor der Division in einen reinen Bruch, (§. 30.) damit ihr dividiren könnet. Z. E. 5 dividirt durch $2\frac{1}{2}$, ist 5 dividirt durch $\frac{5}{2}$, oder multiplicirt durch $\frac{2}{5}$, folglich $\frac{10}{5}$ oder 2. Also auch $\frac{3}{8}$ durch $1\frac{5}{6}$ (oder durch $\frac{11}{6}$) dividirt, ist $\frac{18}{88}$ oder $\frac{9}{44}$. So auch $16\frac{1}{2}$, dividirt durch $3\frac{2}{3}$, ist $\frac{33}{2}$ dividirt durch $\frac{11}{3}$, oder multiplicirt durch $\frac{3}{11}$, folglich $\frac{99}{22}$, $4\frac{11}{22}$ oder $4\frac{1}{2}$.

Anmerkung. „Diesen Quotienten hättet ihr leichter „gefunden, wenn ihr das Dividend $\frac{33}{2}$ und den Divisor $\frac{11}{3}$ „vorher

„vorher durch den beyderseits angemeßnen Divisor 11 „vorgängig, (§. 19.) und zwar, laut der kurz vorher„gehenden Anmerkung, vermittelst der Division der Zähler „dividirt, und diese Brüche $\frac{33}{2}$ und $\frac{11}{3}$ also in $\frac{3}{2}$ „und $\frac{1}{3}$ verwandelt hättet. Denn $\frac{3}{2}$ dividirt durch $\frac{1}{3}$, „oder multiplicirt durch $\frac{3}{1}$, muß auch $\frac{9}{2}$ oder $4\frac{1}{2}$ seyn. „Aber wir behalten nicht leicht gar zu viel Regeln, und „werden durch Vielheit derselben leicht verwirrt.

§. 43.

Ihr habt schon oft bemerkt, daß Brüche vorkommen, die einen durch eine andre Zahl dividirten Zähler, oder einen solchen Nenner, oder zugleich einen solchen Zähler und einen solchen Nenner haben. Z. E. $\frac{\text{3fach } \frac{1}{2}}{4}$, das ist 3 Halbvierthel, oder $\frac{3}{8}$. Denn die Dreyzahl soll nach und nach durch 2 und 4, oder auf einmal durch 8 dividirt werden. So auch $\frac{3}{\text{8 div. d. 2}}$, $\frac{\text{6 div. d. 2.}}{\text{15 div. d. 3.}}$ Solche unordentlich geschriebne Brüche, welche selten im gemeinen Leben vorkommen, werden euch keine Schwierigkeit machen, wenn ihr bedenkt, daß ein Divisor des Zählers ein Factor des Nenners, und ein Divisor des Nenners ein Factor des Zählers sey.

§. 44.

Zuweilen ist euch daran gelegen, anstatt eines Bruchs einen anders benamten zu haben, der jenem ersten Bruche gleich gilt. Z. E. Ihr habt $\frac{1}{2}$ Thaler. Da der Thaler in Groschen,

schen, oder in $\frac{1}{24}$ Thaler getheilt, geschrieben wird: so wollt ihr anstatt $\frac{5}{6}$ lieber $\frac{x}{24}$ haben, da x den Zähler bedeutet, den ihr bisher noch nicht kennt. In solchen Fällen multiplicirt den Zähler des bekannten Bruchs durch den Nenner des unbekannten, und dividirt das Product durch den Nenner des bekannten: so erhaltet ihr den gesuchten Zähler x des unbekannten Bruches. Setzet den gewünschten Nenner darunter: so ist geschehen, was ihr verlangt. Also ist $\frac{5}{6}$, benamt durch 24, der Bruch $\frac{5 \text{ mult. d. } 24, \text{ div. d. } 6,}{24}$, d. i. $\frac{120 \text{ div. durch } 6}{24}$, oder $\frac{20}{24}$.

Und der Bruch $\frac{a}{b}$ welcher seyn soll so viel, als $\frac{x}{c}$, wird $\frac{a \text{ mult. durch } c, \text{ dividirt durch } b}{c}$. Denn auf solche Art habt ihr a durch dieselbe Zahl c sowohl multiplicirt als dividirt, welches (§. 29.) die Grösse nicht verändert; und b, der Divisor des Zählers, ist ein Nenner des a (§. 27.) wie vorher. Also ist $\frac{a \text{ mult. durch } c, \text{ dividirt durch } b}{c}$, noch immer an Werth der Bruch $\frac{a}{b}$.

§. 45.

Betrachtet den Bruch $\frac{45075}{100000}$. Er besteht aus $\frac{40000}{100000}$, und aus $\frac{5000}{100000}$, und aus $\frac{70}{100000}$, und aus $\frac{5}{100000}$. Das ist, wenn ihr oben und unten durch Weglöschung der Nullen dividirt (§. 20.) aus $\frac{4}{10}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{0}{1000}$, $\frac{7}{10000}$, $\frac{5}{100000}$.

Nun

Nun ist es ja einerley, was man für ein Zeichen wählt, daß eine Zahl (z. E. die Zahl Z) nicht Totaleinheiten, sondern solche gebrochne Einheiten bedeuten soll, deren eine jede entweder $\frac{1}{10}$, oder $\frac{1}{100}$, oder $\frac{1}{1000}$, u. s. w. ist.

Weil es nun Bequemlichkeit im Rechnen macht, so ist Folgendes zu einer Regel geworden: Wenn eine Zahl nicht Totaleinheiten, sondern Decimalbrüche (das ist Zehnthel, Hundertthel, Tausendthel, u. s. w.) bedeutet: so läßt man den Nenner weg, entfernet aber den Zähler weiter nach der Rechten hin, von der den Totaleinern gewidmeten Stelle, (welche man durch ein ihr hinten angehängtes Comma anzeigt,) durch so viele Zwischenziffern (sie mögen andre Zahlen oder Nullen seyn) als Nullen, weniger eine Nulle, der weggelaßne Nenner hat. Z. E. Wenn man auf diese Art $\frac{7}{1000}$ schreiben will: so schreibt man 0,007. Die Stelle der Nulle vor dem Comma würde Totaleinheiten bedeuten, wenn nebst $\frac{7}{1000}$ noch Totaleinheiten in der Zahl wären, die man schreiben will. Also wird $6\frac{7}{1000}$ geschrieben, 6,007. Ich will mehr Exempel geben.

$\frac{9}{100}$ ist 0,09.	$16\frac{3}{10}$ ist 16,3.
$\frac{9}{10}$ ist 0,9.	$6\frac{7}{1000}$ ist 6,007.
$\frac{8}{10000}$ ist 0,0008.	$\frac{7}{100}$ ist 0,07.

Also folgen in einer solchen Reihe von Decimalbrüchen, wenn mehrerley Arten zusammen sind,

nach

nach der Stelle der Einheiten, solche gebrochne Zahlen, davon eine jede Einheit $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ ist, u. s. w. unmittelbar auf einander. Folglich bedeutet das Zeichen 17,0502 (weil keine Zehnthel, auch keine Tausendthel da sind,) die Zahl 17 nebst $\frac{5}{100}$, nebst $\frac{2}{10000}$, oder (zu einem Nenner gebracht und addirt) 17$\frac{502}{10000}$.

Gleich wie nun 1 Zehner aus 10 Einern besteht: so besteht auch 1 Einer aus 10 Zehntheln, 1 Zehnthel aus 10 Hundertheln, 1 Hundertthel aus 10 Tausendtheln, u. s. w.

Folglich, wenn zwey Zahlreihen aus Decimalbrüchen, oder theils aus Totalzahlen, theils aus Decimalbrüchen, bestehn; und wenn man ordentlich das Comma unter das Comma, folglich die Einer unter die Einer, die Zehnthel unter die Zehnthel, die Hundertthel unter die Hundertthel (u. s. w.) setzt: so kann man die Addition und Subtraction nach eben den Regeln, als bey Totalzahlen ausführen. Merket aber, daß Nullen, welche Decimalbrüchen, wenn keine bedeutende Ziffern mehr folgen, angehängt werden, nichts bedeuten, und also vergeblich sind. Z. E. 4,5, bedeutet nicht weniger, als 4,50. Denn $\frac{0}{100}$ ist Nichts. Eben so vergeblich sind Nullen, welche vor der ganzen mit Totaleinheiten sich endigenden Zahlreihe geschrieben werden. Z. E. 00075 ist noch immer 75. Exempel:

Addi-

Addition.

0,2	0,9	4,6	4,6	0,02	0,703
0,3	0,8	2,2	3,7	7,3	6,007
0,5	0,(17)	6,8	8,3	7,32	6,71
	1,7				

5,4326	0,0003
0,8004	0,602
6,007	15,7007
0,0008	0,081
12,2408	16,384

Subtraction.

Ihr werdet sehn, daß es dabey in einigen Fällen der Deutlichkeit wegen nöthig sey, der Hauptsumme, von welcher subtrahiret werden soll, einige Nullen anzuhängen, welche ihre Bedeutung nicht ändern. Z. E.

Summe	4,02	ist	4,0200	0,2006	1,08(00)
Theil	1,1062		1,1062	0,08	0,5301
Rest	—	—	2,9138	0,1206	0,5499

Wenn man Decimalbrüche nach dieser Regel zu schreiben gewohnt ist: so stellt man sich im Unterrichte immer (wenn Totalzahlen ohne Decimalbrüche geschrieben werden) die Stelle der Einheiten als die merkwürdige Stelle, oder als die Hauptstelle vor, die den Strich haben müßte, wenn es sich nicht von selbst verstünde, daß, bey dem Mangel des Striches, derselbe hinter der letzten Stelle,

die alsdann die Stelle der Einer ist, gedacht werden müsse. Z. E. die Zahl 73, (wenn sie Totalzahlen bedeutet) ist anzusehn als 73,0.

§. 46.

Wenn ihr in Zahlreihen, welche nach der Regel der Decimalbrüche geschrieben sind, den Strich weiter nach der Rechten rückwärts rückt, (welches, falls nicht Ziffern genug da sind, durch angehängte Nullen geschehen kann,) und wenn ihr also aus der alten eine neue Zahl macht: so habt ihr die alte durch eine hohe Einheit multiplicirt, welche so viele angehängte Nullen hat, als um wie viel Stellen ihr den Strich weiter nach der Rechten rückwärts gesetzt habt. Z. E. 4,562, multiplicirt

durch 10 ist	durch 100 ist	durch 1000 ist	durch 10000 ist
45,62	456,2	4562,0	45620,0,

Denn durch den Rückweg des Strichs um eine Stelle, wird die Ziffer einer jeden Stelle um einen Grad höher, das ist, verzehnfacht; durch seinen Rückweg um 2 Stellen aber wird jede Ziffer um 2 Grade höher, das ist, verhundertfacht, u. s. w.

Hingegen, wenn ihr den Strich weiter, nach der Linken, vorwärts rückt, (welches im erfodernden Falle durch vorangesetzte Nullen, welche an sich selbst Nichts bedeuten, geschehen kann,) wenn ihr also auf solche Weise aus der alten eine neue Zahl macht: so habt ihr die alte durch eine hohe Einheit dividirt, welche so viele Nullen hinter sich hat, als um wie viel Stellen ihr den Strich

nach

nach der Linken weiter vorwärts gerückt habe. Z. E. 14,0038, dividirt

durch 10 ist	durch 100 ist	durch 1000 ist	durch 10000 ist
1,40038.	0,140038.	0,0140038.	0,00140038.

Und, 0,0016, dividirt

durch 10 ist	durch 1000 ist	durch 100 ist
0,00016,	0,0000016,	0,000016.

Denn durch Fortschreitung um eine Stelle weiter zur Linken wird die Ziffer einer jeden Stelle um einen Grad niedriger, folglich verzehntheilt; durch seine Fortschreitung um 2 Stellen wird die Ziffer einer jeden Stelle um 2 Grade niedriger, folglich verhundertheilt, u. s. w.

§. 47.

Wenn ihr also eine nach der Regel der Decimalbrüche geschriebene Zahl durch eine hohe Einheit (§. 46.) multipliciren sollt: so rückt den Strich um so viele Stellen, als die Einheit angehängte Nullen hat, weiter nach der Rechten. Exempel und Beweis sind (§. 46.) oben.

Und, wenn ihr sie durch eine hohe Einheit dividiren sollt: so rückt den Strich um so viele Stellen, als die Einheit angehängte Nullen hat, weiter nach der Linken. Exempel und Beweis sind (§. 46.) oben.

Sollt ihr eine nach solcher Regel geschriebne Zahlreihe durch die andre multipliciren: so multiplicirt sie anfangs, als wenn sie

ordentliche Totalzahlen wären. Das Product, welches ihr alsdann findet, wird dadurch das richtige, wenn ihr hinten in dem Producte so viel Ziffern abzählt, als beyde Factoren zusammen hinter ihrem Striche haben, und wenn ihr vor diesen abgezählten Ziffern des noch nicht berichtigten Products den Strich setzt. Z. E. 6403, multiplicirt durch 4, ist 25612. Also

64,03, multipl. durch 4, ist	0,06403, multipl. durch 0,0004 ist
256,12	0,000025612

Es ist 45326, multiplicirt durch 1302, die Totalzahl 59014452. Also ist

45,326, multiplicirt
durch 130,2

das Product 5901,4452.

Denn ihr habt anfangs mit Fleiß jeden Factor im Gebrauche so angesehn, als wenn seine letzte Ziffer den Strich hinter sich hätte. Dadurch habt ihr seinen Strich um einige Stellen weiter nach der Rechten gerückt, und den Factor um so viel Grade verzehnfacht, das ist, durch 10, oder 100, u. s. w. oder durch eine hohe Einheit multiplicirt. Wenn ihr dieses nur an einem Factor gethan habt: so ist (§. 12, 13.) euer so gefundnes Product das, in eben demselben Grade verzehnfachte gesuchte Product, welches ihr noch berichtigen müßt, und zwar (weil §. 29. eine gleichförmige Division das Mittel zur Aufhebung einer Multiplication ist) vermittelst

einer,

einer, in dem Grade der geschehenen Verzehnfachung nothwendigen, Verzehntheilung. Diese Verzehntheilung in gehörigem Grade geschicht aber durch Versetzung des Striches weiter zur Linken, um so viel Stellen, als der Factor Ziffern hinter dem Striche hatte. Hatte nun auch zugleich der zweyte Factor Ziffern hinter dem Striche: so muß aus demselben Grunde der Strich des noch nicht richtigen Products um so viel Stellen weiter nach der Linken (und also zusammen um so viel Stellen, als beyde Factoren Ziffern hinter dem Striche hatten,) versetzet werden.

Sollt ihr nun zwey nach der Regel der Decimalbrüche geschriebne Zahlreihen durch einander dividiren: so dividirt anfangs, gleichwie in Totalzahlen. Aber den also gefundnen, noch nicht berichtigten, Quotienten müßt ihr berichtigen dadurch, daß ihr um so viel Stellen, (als in dem Dividenden mehr Ziffern hinter dem Striche, wie in dem Divisor; oder als in dem Divisor mehr, wie in dem Dividenden, stunden,) den Strich im ersten Falle weiter nach der Rechten, im zweyten Falle weiter nach der Linken, versetzet. Wenn aber die hinter dem Striche stehenden Ziffern in beyden an Anzahl gleich waren; so dürft ihr den Strich gar nicht versetzen. Z. E. 16, dividirt durch 8, ist 2. Also

1,6 dividirt durch 8 ist 0,2.	Und 0,16 div. durch 0,08 ist 2.
U. 0,00016, div. d. 0,08 ist 0,002.	Und 0,016, div. d. 0,00008 ist 200.

Und weil 44568, dividirt durch 36, den Quotienten 1238 giebt: so ist

44,568 div. d. 0,036 gleichf. 1238.	Aber 44,568 div. durch 0,36 ist 123,8.	4456,8 div. durch 0,36 ist 12380.

Denn wenn die Anzahl der Ziffern hinter dem Striche in dem Divisor und in dem Dividenden gleich ist: so ist (weil alsdann sie beyde zwey, durch dieselbe hohe Einheit dividirte, Totalzahlen sind) ihr Quotient derselbe, (§. 19.) als wenn sie undividirte Totalzahlen wären. Also darf die gleiche Anzahl der Ziffern (in dem Dividenden und in dem Divisor) hinter dem Striche für Nichts geachtet werden. Sind aber nur in dem Dividenden, nicht in dem Divisor, Ziffern hinter dem Striche: so habt ihr, durch die anfängliche Vernachlässigung der Stelle des Strichs, das Dividend, folglich den wahren Quotienten, in demselben Grade verzehnfacht, als viel oder wenig Ziffern hinter dem Striche waren. (§. 16.) Ihr müßt also den noch nicht berichtigten Quotienten durch eine Verzehnthelung in eben demselben Grade (§. 29.) berichtigen, folglich den Strich um so viel Stellen weiter nach der Linken rücken. Hatte ferner nur der Divisor, nicht das Dividend, Ziffern hinter dem Striche: so habt ihr den Divisor im gewissen Grade verzehnfacht, folglich den wahren Quotienten in demselben Grade (§. 19.) verzehnthelt, daher ihr den nicht berichtigten Quotienten (§. 29.) in demselben Grade verzehnfachen,

folg-

folglich den Strich um die gesagten Stellen weiter nach der Rechten versetzen müsset. Wenn aber sowohl das Dividend, als der Divisor Ziffern hinter dem Striche, und zwar in ungleicher Anzahl, haben: so kann nur (weil gleich viele gar keine Veränderung im Quotienten machen) der Ueberschuß, welcher entweder in dem Dividenden oder in dem Divisor ist, als wenn er allein da wäre, gerechnet werden; daher im ersten Falle der Strich weiter nach der Rechten, im zweiten Falle weiter nach der Linken, versetzet werden muß.

§. 48.

Man kann aber einen jeden Bruch in Decimalbrüche verwandeln. Sehet erst das Exempel. Es sey der Bruch $\frac{5}{6}$.

Man dividire, und setze, weil man es nicht kann, immer eine Nulle zu. Z. E.

$$
\begin{array}{r|l}
5(0) & 0,83\frac{2}{6} \\
\not{6} & \\
48 & \\
\hline
2(0) & \\
\not{6} & \\
18 & \\
\hline
2 &
\end{array}
$$

Ihr habt durch den nach und nach geschehenen Zusatz der Nullen, anstatt 5 durch 6, wirklich 500 durch 6 dividirt, und den Quotienten $83\frac{2}{6}$ gefunden.

Das ist aber der, durch 100 multiplicirte, wahre Quotient. Dividirt ihn durch 100, das ist, setzt den Strich vor 2 Ziffern, (den Bruch $\frac{2}{6}$ ungerechnet,) so habt ihr den wahren Quotienten. Denn 0,83$\frac{2}{6}$ ist $\frac{83\frac{2}{6}}{100}$, oder $\frac{500}{600}$, das ist $\frac{5}{6}$.

§. 49.

Sehet folgende 2 Seulen oder Columnen von Zahlen:

24	$\frac{3}{8}$	Zeile m.
26	17	—— a
17	18	—— b
100	$\frac{2}{11}$	—— c
$9\frac{1}{3}$	5	—— d
16	200	—— e
48	$3\frac{1}{7}$	—— f
$1\frac{3}{7}$	$\frac{4}{5}$	—— g
3	156	—— h
$\frac{5}{8}$	24	—— i

Stellt euch vor, daß von solchen zweyen Seulen oder Columnen, sie mögen hoch oder niedrig, einander an Höhe gleich oder ungleich seyn, eine jede ganze Columne eine Zahl anzeige, welche ein Product der Multiplication aller in derselben Columne stehenden Factoren ist; daß entweder zur Rechten der Zähler, zur Linken der Nenner, oder dort der Nenner, hier der Zähler stehe, und daß ihr diesen Bruch, wenn er unächt ist (§. 25.) aufheben, (§. 28.) oder, wenn er zwar ächt ist, aber einen ver-

verständlichern Ausdruck leidet, (§. 31.) verständlicher ausdrücken oder verkleinert vorstellen, oder doch wenigstens den Versuch machen sollet, ob es geschehen könne. So geschriebne Brüche nenne ich Brüche in Columnen, und die Arbeit an denselben die Columnenrechnung, oder Productrechnung.

Weil der Werth dieses ganzen Bruchs sich gleich bleibt, wenn ihr das eine Product als den Zähler, und das andre Product als den Nenner, durch einerley Zahl multiplicirt, oder durch einerley Zahl dividirt (§. 31.): so sind folgende Mittel da, den in Columnen geschriebnen Bruch verkleinert vorzustellen.

1) Wenn eine Zahl einer Columne einer Zahl der andern Columne gleich ist: so löscht sie beyde weg, wie 17 in den Zeilen a und b.

2) Wenn eine Zahl einer Columne durch eine andre in der andern Columne aufgeht, wie 200 in e, und 100 in c: (und einige andre in diesen beyden Columnen) so löscht die kleinere weg, dividirt die größre durch die kleinere, löscht die größre weg, und schreibt nur den Quotienten an ihrer Stelle.

3) Wenn eine Zahl in der einen Columne, und eine Zahl in der andern Columne, durch einen gemeinschaftlich angemeßnen Divisor (§. 32.) dividirt werden kann, wie

18 in b, und 48 in f: so löscht sie beyde weg, und schreibt nur die Quotienten an ihrer Stelle.

4) Wenn zwey reine Brüche von gleichem Nenner in verschiednen Columnen vorkommen, wie in den Zeilen m und i: so löscht die Nenner weg, und macht dadurch die Zähler zu Totalzahlen. Denn alsdann habt ihr beyde Columnen durch den zweymal ausgelöschten Nenner multiplicirt.

5) Kömmt in einer Columne ein Bruch vor, dessen Nenner in derselben Columne als eine Totalzahl steht, wie in den Zeilen d und g zur Rechten: so löscht den Nenner und diese Totalzahl beyde weg; denn alsdann habt ihr dieselbe Columne, vermittelst der doppelten Auslöschung, durch eine Zahl multiplicirt, und auch durch dieselbe Zahl dividirt, und folglich (§. 29.) in gleicher Grösse gelassen.

6) Kömmt in einer Columne ein Bruch mit einem solchen Nenner vor, der in den Totalzahlen derselben Columne, und in den Nennern der Brüche der andern Columne, seines Gleichen nicht hat, wie in der Zeile c: so löscht den Nenner weg, betrachtet den Zähler als eine Totalzahl, aber tragt den Nenner als eine Totalzahl in die andre Columne über. Denn also multiplicirt ihr eine Columne eben so sehr, als die andre, wodurch der Bruch unverändert bleibt.

7)

7) Wenn vermischte Zahlen (aus einer Totalzahl und einem Bruche) vorkommen, wie in vielen Zeilen der obigen Columnen: so verwandelt sie in reine Brüche, (§. 30.) und behandelt die Nenner nach den bisherigen Regeln.

8) Beobachtet aber diese Regeln nicht nur an den ursprünglichen, sondern auch an denen, nach dieser Vorschrift neu entstandnen, Zahlen. Alsdann wird sehr oft der Bruch, der bey allen diesen Veränderungen an Werth oder an Grösse derselbe bleibt, viel verkleinerter vorgestellt werden, wodurch ihr euch die Arbeit erleichtert, sowohl zu multipliciren, als zu dividiren, oder den Bruch so verständlich, als möglich ist, vorzustellen. Z. E. der obige ungeheure Bruch schmilzt so ein, daß er $\frac{1}{44}$ wird, wenn der Zähler, oder daß er 44 wird, wenn der Nenner zur Rechten steht. (Denn wenn eine Columne ganz leer wird: so besetzt man sie durch 1, weil man bey jeder Division einer Zahl durch sich selbst, 1 setzen kann.)

§. 49. Zusatz.

Wenn ihr eine Zahl durch einen Bruch, (zum Exempel 1583 durch $\frac{12}{24}$) oder gar durch eine Summe von 2 Brüchen, (als durch $\frac{12}{24}$ und $\frac{7}{288}$ multipliciren sollt: (welches oft bey Thalern, Groschen und Pfenningen vorkömmt,) so ist die bisher euch bekannte Operation diese:

1583

1583	288) 1583 (7
19	11081
14247	$38\frac{137}{288}$ Specialprod.
1583	
24) 30077	
$1253\frac{5}{24}$ Specialproduct.	
$38\frac{137}{288}$ Zweytes.	
$1291\frac{197}{288}$	

Aber dasselbe kann auf eine andre Art weit bequemer geschehen. Ich will erst das Exempel setzen, (wobey man nur an Thaler, Groschen und Pfenninge denken darf,) alsdann erklären und beweisen.

$\frac{19}{24}$ und $\frac{7}{288}$		1583			
a = 12 = $\frac{1}{2}$	6 = $\frac{1}{2}$ = d	a =	791	12	
b = 6 = $\frac{1}{2}$	1 = $\frac{1}{6}$ = e	b =	395	18	
c = 1 = $\frac{1}{6}$		c =	65	23	
		d =	32	23	6
		e =	5	11	11

1291 u. $\frac{15}{24}$ u. $\frac{17}{288}$

oder 1291 u. $\frac{197}{288}$, wie oben.

Ich habe nämlich die $\frac{19}{24}$ zerfällt in Theile, nämlich in 12, in 6, und in 1, (als Vierundzwanzigthel). Eben so habe ich die $\frac{7}{288}$ zerfällt in 6 und 1 solcher gebrochnen Einheiten. Die $\frac{12}{24}$ habe ich als eine halbe Totaleinheit, das ist, als ein Product der Einheit durch $\frac{1}{2}$, angesehen, und durch $\frac{1}{2}$ den Factor 1583, multiplicirt; das Pro-

duct

duct aber in die Zeile a gesetzt, wo (gleich wie auch in den folgenden Zeilen) die erste Nebencolumne aus 24theln, die zweyte aus 288theln besteht. Die $\frac{6}{24}$ habe ich als $\frac{1}{2}$ von $\frac{12}{24}$, oder von $\frac{1}{2}$ gesehen, und den Factor 1583 durch $\frac{1}{2}$ mal $\frac{1}{2}$ multiplicirt. Nun stand 1583 mal $\frac{1}{2}$ schon in der Zeile a. Ich durfte also nur diese Zeile durch $\frac{1}{2}$ multipliciren, um auch mit $\frac{6}{24}$ oder $\frac{1}{4}$, multiplicirt zu haben. Das Product steht in der Zeile b. Eben so ist $\frac{1}{24}$ nichts anders als $\frac{1}{6}$ aus $\frac{6}{24}$. Ich habe also die Zeile b durch $\frac{1}{6}$ multiplicirt aus eben dem Grunde. Das Product steht in der Zeile c. Nun ist $\frac{6}{288}$ oder $\frac{1}{48}$ nichts anders, als $\frac{1}{2}$ aus $\frac{1}{24}$. Ich habe also aus dem gesagten Grunde die Zeile c durch $\frac{1}{2}$ multiplicirt, und das Specialproduct in d gesetzt. Endlich ist $\frac{1}{288}$ in Ansehung der $\frac{6}{288}$ ein $\frac{1}{6}$. So entstand aus der Zeile d die Zeile e. Also hatte ich auf eine besondre Art, welche ich die relative Multiplication nenne, den Factor 1583 nach und nach, und mittelbar, durch alles multiplicirt, wodurch ich sollte. Ich addirte die Specialproducte. So ward 1291 u. ($\frac{16}{24}$ u. $\frac{5}{288}$) oder zusammen $\frac{197}{288}$.

Ich machte mir nämlich bey den Specialproducten zur Regel, keine Brüche zu setzen, wenn ich Totalzahlen dafür setzen konnte, und keine 288thel zu setzen, wenn ich noch 24thel setzen konnte. In dem letzten Haupt-Producte verwandelte ich die 288thel nach Möglichkeit in 24thel, und diese in Totalzahlen, nach Regeln, die aus der Bruchrechnung schon bekannt seyn müssen, ehe dieses verstanden wird.

Diese

Diese relative Multiplication aber hat alsdann nur erst Bequemlichkeit, wenn ein geübter Rechner mit Brüchen von sehr gewöhnlichen Nennern umgeht. Wegen der Geldsorten sind die gewöhnlichsten Nenner an manchen Orten 12thel, weil Pfenninge 12thel von einem Groschen oder Schillinge sind; ferner 16thel, weil Schillinge 16thel von einer Mark-Lübsch sind; 24thel wegen der Groschen; 192thel wegen der Pfenninge, gegen eine Mark-Lübsch gerechnet; 288thel wegen der Pfenninge gegen einen Reichsthaler zu 24 Groschen, (und den Groschen zu 12 Pfenningen gerechnet;) 32thel wegen der Lothe gegen ein Pfund, u. s. w.

Diese Art der Multiplication gründet sich darauf, daß es einerley ist, etwas auf einmal durch ein Ganzes, z. E. durch 19, oder nach und nach durch Factoren-theile, woraus Specialproducte werden, (z. E. durch 12 und 6 und 1) zu multipliciren; und ferner, daß es einerley ist, etwas, das ich A nennen will, auf einmal durch einen Factor, z. E. durch $\frac{a}{b}$, oder durch $\left\{\frac{c}{d} \text{ multiplicirt durch } \frac{e}{f}\right\}$ zu multipliciren, wenn dieser Factor $\frac{a}{b}$ in die Factoren $\frac{c}{d}$ und $\frac{e}{f}$ zerfällt werden kann. Wenn man nun das Product $\left\{A \text{ multiplicirt durch } \frac{c}{d}\right\}$ vorher schon einmal gemacht hat: so darf man dieses Product

duct aus A und $\frac{c}{d}$, nur durch $\frac{e}{f}$ multipliciren, wenn man A durch $\frac{a}{b}$ oder durch $\left\{\frac{c}{d}\text{ multipl. durch }\frac{e}{f}\right\}$ multipliciren soll.

Bey dem Zerfällen solcher Brüche in Theile kömmt es nun vornehmlich darauf an, die Theile so einzurichten, daß der erste Theil ein solches Product der Totaleinheit oder der Principaleinheit werde, welches vermittelst der Multiplication durch eine einzige gebrochne Einheit, z. E. durch $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, u. s. w. daraus werden kann, und daß der folgende Theil wiederum ein Product solcher Art von dem vorhergehenden Theile werde. Denn durch gebrochne Einheiten kann man leicht multipliciren, aber nicht so leicht durch $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, weil man alsdann erst multipliciren, hernach dividiren, und also vorgängig eine ungültige Zeile schreiben, und hernach weglöschen, oder alles vorgängig auf einer andern Stelle der Tafel machen müßte. Daher will ich einige Exempel bequemer Zerfällungen der Brüche anführen. Ich nenne aber Brüche (wenn eine Mark-Lübsch die Principaleinheit ist) die Schillinge zu 16 auf eine Mark, und Pfenninge zu 12 auf einen Schilling; und wenn ein Thaler die Principaleinheit ist, sind Brüche die Groschen zu 24 auf einen Thaler, und abermals die Pfenninge zu 12 auf einen Groschen; und wenn ein Pfund die Totaleinheit ist, so sind Brüche die Lothe zu 32 auf ein Pfund, und die Quentchen zu 4 auf ein Loth. Also, (da ein Pfenning $\frac{1}{192}$ Mark-Lübsch ist)

16 Mark

16 Mark 13 ß. 9 pf. multipl. durch 488 M.

$\frac{8}{16}$ ist $\frac{1}{2}$ mal 1
$\frac{4}{16}$ ist $\frac{1}{2}$ mal $\frac{8}{16}$
$\frac{1}{16}$ ist $\frac{1}{4}$ mal $\frac{4}{16}$
ist $\frac{13}{16}$ oder 13 ß.

$\frac{6}{192}$ ist $\frac{1}{2}$ mal $\frac{1}{16}$
$\frac{3}{192}$ ist $\frac{1}{2}$ m. $\frac{6}{192}$
ist $\frac{9}{192}$ od. 9 pf.

488 M.		
16		
2928 M.		
488	—	
244	—	
122	—	
30	—	8 ß.
15	—	4 ß
7	—	10 ß
8227 M.		6 ß.

16 Thlr. 11 gr. 10 pf. durch 488

8 ist $\frac{1}{3}$ 6 ist $\frac{1}{2}$
2 ist $\frac{1}{4}$ 3 ist $\frac{1}{2}$
1 ist $\frac{1}{2}$ 1 ist $\frac{1}{3}$

488					
16					
2928	Thl.				
488	—				
162	—	16 gr.			
40	—	16	—		
20	—	8	—		
10	—	4	—		
5	—	2	—		
1	—	16	—	8 pf.	
8048	Thl.	14 gr.		8 pf.	

16 Pf. 14 Loth 3 Quent. mult. durch 488

8 ist $\frac{1}{4}$ 2 ist $\frac{1}{4}$ mal 2 Loth
4 ist $\frac{1}{2}$ 1 ist $\frac{1}{2}$
2 ist $\frac{1}{2}$

488			
16			
2928 Pf.			
488	,,		
122	,,		
61	,,		
30	,,	16 Loth	
7	,,	20	,,
3	,,	26	,,
8032 Pf.		30 Loth	

Die

Die Uebungen in solcher relativen Multiplication, welche man auch Zerstreuung des Factors und Ausnehmen aus Producten (mit einem undeutlichen Ausdrucke) nennt, ist eine der nützlichsten, und weil entweder allemal angestrengte Aufmerksamkeit oder grosse Fertigkeit erfodert wird, auch eine der schwersten. Wer aber sicher, geschwind und bequem rechnen will, muß sich sehr darinnen üben.

V.

Anfang der Buchstabenrechnung und Algebra.

§. 50.

Wenn ihr von Dutzenden, Schocken und Hunderten oft im Zusammenhange etwas niederschreiben sollt; so steht es euch frey, zu eurer Bequemlichkeit ein Dutzend ein D, ein Schock ein S, oder wie ihr wollt, zu nennen. Die Römer haben ja die Zahlen durch Buchstaben ausgedrückt. So könnt ihr es auch mit andern Grössen machen. Z. E. Ihr wollet die Menge Wassers in einem runden und in einem viereckigen Gefässe, mit einander vergleichen, und darüber mancherley zu eurem Zwecke dienende Gedanken niederschreiben. Nennt z. E. jene Menge ein r, und diese ein v. Aber behaltet, so lange eure Betrachtung währt,

eben dieselben Buchstaben für eben dieselben Zahlen, Grössen und Sachen, oder für alle diejenigen, von denen ihr wißt, daß sie einander gleich sind; wenn ihr nicht besondere Ursache habt, gleiche Dinge, wegen Verschiedenheit der äusserlichen Gestalt oder anderer Umstände, mit verschiedenen Buchstaben zu bezeichnen; welche sonst nur gebraucht werden, Dinge, die unter einander ungleich sind, oder deren Gleichheit ihr noch nicht wißt, von einander zu unterscheiden.

§. 51.

Wenn ihr zu einer Zeit 5, hernach 7 Reichsthaler in den Schrank gelegt, hernach 2 ausgegeben habt, ferner vermöge eurer Erinnerung wißt, daß ihr 3 mal so viel hinzu gelegt habt, als euer Rest war, hierauf die Hälfte des ganzen Vorraths wieder ausgegeben habt; endlich jetzund wissen wollt, wie viel, wenn kein Zufall euren Rest vermehrt oder vermindert hat, da liegen müsse: so wollt ihr euch eine unbekannte Zahl bekannt machen, durch Nachdenken über bekannte Zahlen, welche durch die 4 Species oder Berechnungsarten der Zahlen und Grössen, (das ist, durch Addition, Subtraction, Multiplication oder Division), in dieser Absicht behandelt werden müssen.

Die ganze Zahlenkunst aber besteht 1) in der Kunst, diese 4 Species auf die leichteste und nützlichste Art in Zahlen auszuüben, und folglich die Summen, Reste, (Unterschiede und Differenzen) Pro-

Producte und Quotienten, die anfangs unbekannt sind, in Zahlen bekannt zu machen. 2) In der Kunst, aus den Umständen der gezählten Dinge zu schliessen, welche Rechnungsart in Zahlen man jedesmal brauchen müsse, um durch die bekannten Zahlen einige gewünschte, bisher unbekannte, bekannt zu machen. 3) In der dritten Kunst, oder in der **Zahlenalgebra**, welche das Mittel ist, die erste und die zweyte Kunst mit eigner Einsicht sich zu verschaffen und zu erleichtern, und allgemeine Regeln oder **bequeme Formeln** zu verstehen, mit Ueberzeugung für richtig zu erkennen, oder sogar zu erfinden. Es sind aber Formeln, allgemeine Regeln und Muster, wie man bey ähnlichen Umständen aus den bekannten Zahlen (welche es auch seyn mögen) die daraus erfindlichen unbekannten erfinde. Eine solche Formel ist zum Exempel: **Die größre von zweyen unbekannten Zahlen, (wenn etwa Summe und Unterschied bekannt sind) ist die halbe Summe mit dem Zusatze des halben Unterschiedes unter beyden.** Wenn man nun die größre Zahl g, die kleinere k, die Summe S, den Unterschied U nennt, und wenn man, welches ich bald lehren will, einige andre Zeichen versteht: so kann man folgende Formel: $g = \frac{S+U}{2}$, welche die ganze Regel enthält, verstehn, sich niederschreiben, und in jedem Falle, wenn man bey solchen Umständen die größre von zweyen Zahlen finden will, sich darnach richten. Und wenn man nebst solchen Zeichen die Zahlen-

algebra versteht: so kann man die Regel und die Formel selbst erfinden und mit eigner Ueberzeugung gebrauchen, oder die, auch auf eine andre Art mögliche, Erfindung und Ueberzeugung sich und Andern erleichtern.

Anmerkung. Die allgemeine Sachenalgebra ist von dieser Zahlenalgebra nur darinnen unterschieden, daß sie die Regeln auf Grössen anwendet, die wir nicht zählen, oder in Zahlen nicht ausdrücken können oder wollen; und welche dennoch zusammengesetzt oder addirt, also auch subtrahirt, auch factorenmässig zusammengesetzt oder multiplicirt, folglich auch dividirt werden können.

Es ist also auch nöthig, daß ihr andre Buchstaben zu bekannten als zu unbekannten Zahlen und Grössen wählt: Z. E. zu den ersten die ersten Buchstaben des Alphabets, a, b, c, u. s. w. zu den zweyten die letzten Buchstaben desselben, v, w, x, y, z.

§. 52.

Die gewöhnlichsten algebraischen Zeichen sind: 1) Das Zeichen der Gleichheit (=) zwischen 2 Zeichen von Zahlen und Grössen, welche gleich viel bedeuten. Z. E. 7 = VII, leset 7 ist (oder ist gleich) VII.

2) Das Zeichen der Ungleichheit ($\lessgtr$) zwischen Zeichen ungleicher Dinge, kehrt die Oeffnung nach dem Grössern, die Spitze nach dem Kleinern. Z. E. L > 49, oder 49 < L.

3) Das Zeichen der Addition oder Plus (+) zeigt an, daß statt der Zahlen, zwischen welchen

welchen es steht, ihre durch die Addition erfindliche Summe gedacht werden soll. Z. E. $3 + 2 = 5$. So auch $3+2+4=9$. Leset: 3, nebst 2, nebst 4 sind zusammen 9. So auch in Buchstaben $a + b + c$, das ist, die Summe a, nebst b, nebst c. Die erste Zahl also, welche sonst kein Zeichen vor sich hat, hat ein verschwiegnes Plus vor sich. Daher ist $5+2=+5+2$. In einigen Fällen, wo es zweifelhaft oder auch gleichgültig ist, ob + oder — gelte, schreibt man so: $a \pm b$.

4) **Das Zeichen der Subtraction oder Minus** (—) zeigt, daß man statt der Zahlen, zwischen welchen es steht, den durch die Subtraction erfindlichen Ueberschuß der ersten über der zweyten denken soll. Z. E. $7-2=5$. Oder $5-V=0$. Leset: 7 minder 2 ist 5. Oder 5 minder V (nämlich römisch ausgedrückt) ist 0 oder Nulle. So auch in Buchstaben $a - b$; das ist, der Ueberschuß der Zahl a über der Zahl b.

5) **Das Zeichen der Multiplication ist** ein Punkt, oder Andreaskreuz, (×) zwischen Zahlen, die als Factoren ihr durch die Multiplication erfindliches Product bedeuten sollen. Z. E. $2 . 4 = 8$. Leset: 2 mal 4 ist 8. So auch, $2 . 4 . 3 = 24$. So auch $2 \times 4 = 8$. Und $2 \times 4 \times 3 = 24$. In Buchstaben aber ist das Multiplicationszeichen die Abwesenheit aller Zeichen zwischen den Factoren. Daher ist a b das Product der Multiplication der Zahl a durch die Zahl b. So auch a b c das Product dieser dreyen Factoren, u. s. w.

6) Das Divisionszeichen verbindet das Dividend mit dem Divisor entweder bruchmässig, wie $\frac{12}{3}$, oder neben einander durch einen dazwischen stehenden Doppelpunct, als 12 : 3. Dieß Zeichen bedeutet also, daß man anstatt des Dividenden und des Divisors ihren Quotienten denken soll. Z. E. $\frac{12}{3}$ (oder 12 : 3) = 4. Leset: 12, dividirt durch 3, ist 4. So auch in Buchstaben, $\frac{a}{b}$ oder a : b, das ist, der Quotient der Division der Zahl a durch die Zahl b.

§. 53.

Wenn ein Behältniß, welches Wasser enthält, zu gleicher Zeit eben so großen Abfluß, als Zufluß hat: so ist an dem, was darinnen ist, der Menge nach, keine Veränderung. Ist aber entweder der Zufluß oder Abfluß größer; so ist die Veränderung nur aus dem Unterschiede zu ermessen. Eben so ist es mit vielen andern Dingen, z. E. mit dem Abgange an einer Münzsorte, und dem Zusatze an der andern; mit Gewinn auf der einen, und Verlust auf der andern Seite; mit Schulden und Foderungen beschaffen. Solche Grössen, deren Gleichheit einander vernichtet, und deren einseitiger Ueberschuß nur geachtet wird, heissen widrig. Von widrigen Grössen nennt man die eine positiv, die andre negativ, nach Belieben; jene positive bezeichnet man mit Plus (+), diese negative bezeichnet man mit Minus (—). Und hierinnen besteht die Realbedeutung dieser beyden Zeichen. Vermöge derselben giebt es wirklich Minuszahlen,

(z. E.

(z. E. — 1, — 2, — 3, u. s. w.) Denn diese bedeuten keinesweges 1, 2, 3 weniger, als Nichts, sondern 1, 2, 3 negative Dinge, die gezählt werden.

Aber die vorher (§. 50.) gezeigte Bedeutung der beyden Zeichen (+ und —) Plus und Minus, da Plus die Theile verbindet, die addirt werden sollen, und da Minus anzeigt, was subtrahirt werden soll, nenne ich die arithmetische Bedeutung dieser Zeichen. Es ist aber zu merken, daß wenn beyde Zeichen vor einer Zahl fehlen, allemal Plus zu verstehen sey. Daher ist 3 = + 3. Und 3 — 2 = + 3 — 2.

In jener Realbedeutung kann es nicht einmal widersinnig scheinen, sich eine kleinere Pluszahl und eine grössere Minuszahl (z. E. 5 — 7, oder — 7 + 5) vorzustellen. Denn der Abfluß kann eben sowohl grösser seyn, als der Zufluß, wenn Vorrath da ist. In solcher Bedeutung machen auch die alleinstehenden Minuszahlen — 1, — 2, — 3, u. s. w. (oder — a, — 5 a, — a b) uns keine Schwierigkeit.

Sie können aber auch in arithmetischer Bedeutung vorkommen, wenn die arithmetischen Pluszahlen, davon sie subtrahirt werden sollen, zwar vor Ende der Rechnung, aber nicht jetzund, in Betrachtung kommen. Ich kann ja meine Aufmerksamkeit auf einen Defect 7, oder (+ 2 — 9) richten, ohne eben jetzund an alle übrigen Theile meiner Summe zu denken.

Das Zeichen Plus oder das Zeichen Minus aber geht mehrentheils einzelne Theile einer, mit algebraischen Zeichen neben einander geschriebener, Zahlreihe an. So ist es in $4 + 6 - 2 + 3 - 1$. Es kann aber auch 2, 3, 4 oder mehr Theile oder das Ganze zusammen angehn. Z. E. $-(6+3-2)$. Die so bezeichneten Zahlen bedeuten so viel, als einen Defect 6, und noch einen Defect 3, wovon sich doch 2, als ein Vorrath, wieder gefunden haben, und also von dem durch $6+3$ oder durch 9 bezeichneten Defecte abgerechnet werden müssen. Kurz, sie bedeuten einen Defect 7. Ginge das Minuszeichen nur den ersten Theil an, z. E. $-6+3-2$: so bedeutete alles zusammen erstlich einen Defect 6, zweytens einen zur Summe gehörigen Theil 3, und abermals einen Defect 2, kurz, einen Defect 8, und einen zur Summe gehörigen Theil 3, und, wenn man Defect und Vorrath gegen einander abrechnet, noch einen Defect 5, und also ganz etwas anders, als zuvor. Hieraus versteht man, was ich sage: das Plus innerhalb desjenigen Minuszeichens, welches mehr Glieder angeht, (wie in $-(6+4-2)$ wobey allezeit die erste Zahl nach der Klammer ein sich von selbst verstehendes Plus hat,) ist, wenn man das allgemeine Minuszeichen wegläßt, Minus; und das Minus, innerhalb des allgemeinen Minuszeichens, ist Plus. Daher ist $-(6+4-2) = -6-4+2. = -10+2 = -8$, wenn man von dem Defecte den Vorrath abrechnet. Hingegen innerhalb des allgemeinen Pluszeichens, welches viele Glieder zugleich angeht,

geht, wie $+(6+3-2)$ bleibt nach der Aufhebung des allgemeinen Zeichens das Pluszeichen, wie es war, und das Minuszeichen, wie es war, an den einzelnen Gliedern. Daher ist $+(-3+2+6) = -3+2+6$; und man schreibt fast allemal auf die letzte Art. Alles dieses bedarf keines Beweises, weil es gnug ist, zu sagen, daß man die Zeichen in solcher Bedeutung zu brauchen gewohnt ist.

Es folgt hieraus aber 1) es sey einerley, einer algebraisch ausgedrückten Zahlreihe, entweder ein allgemeines Minus vorzusetzen, wenn die Zeichen der einzelnen Glieder unverändert bleiben; oder, mit Weglassung jenes allgemeinen Minuszeichens, die Zeichen der Glieder umzukehren, das ist, ihr Plus in Minus, und ihr Minus in Plus zu verwandeln. Daher ist $-(6+8-3) = -6-8+3$. Und $-(-3+4) = +3-4$ oder $3-4$. 2) Wenn man zugleich die Zeichen der einzelnen Glieder verwandelt, und zugleich ein allgemeines Minuszeichen voransetzt: so heben diese beyden Veränderungen einander auf, und man hat nur den Ausdruck verändert. Daher ist $-10+4 = -(10-4)$. Denn man hat erstlich die Zeichen umgekehrt, hernach aber das allgemeine Minuszeichen vorgesetzt, welches anzeigt, daß die neuen Zeichen umgekehrt, und also die alten so, wie sie waren, wieder hergestellt werden müssen.

§. 54.

Ein Satz von der Gleichheit zweyer Dinge oder Zeichen, heißt eine Gleichung. Z. E. VII = 7. Oder 5 + 2 = 7. Oder 7 = 9 — 2. Oder $2\frac{1}{3}$. 3 = 7. Oder 7 = $\frac{14}{2}$. So auch in Buchstaben X = $\frac{14}{2}$. Oder 2 S = 8 M, (welches letztere offenbar wahr ist, wenn S ein Schock oder 60, und wenn M eine Mandel oder 15, bedeutet).

Eine Gleichung hat allemal 2 Hauptglieder, nämlich diejenigen ganzen Grössen-Zeichen, zwischen welchen, weil sie etwas Gleiches bedeuten, das Zeichen der Gleichheit steht. Z. E. In der Gleichung (2 S + 8 M) = (CCL — X) oder CCXL. Aber ein Glied kann verschiedene positive oder negative Theile haben. Z. E. Das erste Glied hat erstlich + 2 S, zweytens + 8 M; das andre Glied erstlich + CCL, zweytens — X.

Eine Kette von Gleichungen ist eine Reihe vieler gleichen Zeichen, zwischen welchen das Zeichen der Gleichheit wiederholt wird, als VII = 5 + 2 = 9 — 2 = $2\frac{1}{3}$. 3 = $\frac{14}{2}$ = 7. So auch in Buchstaben $\frac{S}{2}$ = XXX = 2 M = 30.

§. 55.

Ihr könnt aus jedem Paar Glieder, die zu einer Kette von Gleichungen gehören, eine Gleichung machen. Z. E. XXX = 30. (§. 54.)

Ihr

Ihr könnt auch aus einer alten Gleichung eine neue machen auf verschiedne Art.

1) Durch Versetzung der ganzen Glieder. Z. E. X = 10. Also 10 = X.

2) Durch Verwechselung der positiven Gleichungen und der negativen. Z. E. + y = + z. Also — y = — z. Oder auch, — 4 = — IV. Also 4 = IV. Denn was gleich ist als Vorrath, ist auch gleich als Defect.

3) Durch Verwechselung dessen, was in der Gleichung als ein Factor, als ein Divisor, oder als ein Glied oder Theil steht, (§. 54.) mit dem, was man demselben entweder unmittelbar, oder laut andrer Gleichungen, als gleich erkennt. Z. E. vorausgesetzt, daß $\frac{3\,D}{2} = 1\frac{1}{2}\,D$; so folgt aus der Gleichung, $1\frac{1}{2}\,D = 18$, diese, $\frac{3\,D}{2} = 18$. Oder vorausgesetzt diese erste Gleichung, $2\,D = 24$; so folgt aus einer zweyten Gleichung, nämlich aus $\frac{4\,S}{2D} = 10$, auch diese dritte: $\frac{4\,S}{24} = 10$.

4) Durch Weglöschung eines gleich großen positiven und negativen Theiles, oder eines gleichen Factors und Divisors, kurz, gleich grosser widriger Rechnungsarten, in demselben

Gliede

Gliede der Gleichung. Widrig sind unter sich erstlich die Addition und Subtraction, zweytens die Multiplication und Division. Z. E.

Aus der Gleichung $a + b - b = \frac{c}{2}$,
folgt $a = \frac{c}{2}$.
Aus der Gleichung $D = 2a - c + c$,
folget $D = 2a$.
Aus der Gleichung $\frac{5 \cdot 12}{5} = D$,
folget $12 = D$.
Aus der Gleichung $ah : a = 100$,
folget $h = 100$.

5) Durch gleichförmige Addition, Subtraction, Multiplication oder Division an beyden Gliedern der Gleichung. Z. E.

Die alte Gleichung $h = 100$, wird

1) $h + a = 100 + a$
2) $h - a = 100 - a$
3) $ah = 100a$
4) $h : a = 100 : a$
5) $\frac{h + 10}{5} = \frac{100 + 10}{5}$
6) $\frac{h + 10 - D}{5} = \frac{100 + 10 - D}{5}$
7) Aus dieser Gleichung $\frac{h + 10 - D}{5} = \frac{100 + 10 - D}{5}$ wird wieder

1)

1) $\frac{(h+10-D)\times 5}{5} = \frac{(100+10-D)\times 5}{5}$. Aus dieser

2) $h+10-D = 100+10-D$. Aus dieser

3) $h+10-D+D = 100+10-D+D$. Aus dies.

4) $h+10 = 100+10$. Aus dieser

5) $h+10-10 = 100+10-10$. Aus dieser

6) $h = 100$. Welches ich einmal für allemal so umständlich zeige.

6) **Folglich durch Weglöschung gleicher, und in gleichförmiger Rechnungsart an beyden Gliedern der Gleichung gebrauchter, Zahlen**, das ist, durch beyderseitige Weglöschung eines gleichen Summentheils, der addirt werden soll; eines gleichen Abzugs, der subtrahirt werden soll; eines gleichen Factors, oder Divisors, wodurch man beyde ganze Glieder multipliciren oder dividiren soll. Daher wird

aus der Gleichung $\frac{h+10-D}{5} = \frac{100+10-D}{5}$

entweder nach und nach

1) $h+10-D = 100+10-D$
2) $h+10 = 100+10$
3) $h = 100$.

oder auf einmal, wenn man Uebung hat,

$h = 100$.

7) **Durch Verwechselung dessen, was nach den Regeln der 4 Rechnungsarten (oder Species) gleich ist.** Z. E. (a

a) Die Ordnung der Theile ist der Summe gleichgültig. Also
schließt man aus $h - m + D = 97$ den Satz

$$D + h - m = 97.$$

b) Die Ordnung der Factoren ist dem Producte derselben gleichgültig. Daher schließt man aus $h\,d\,m = 18000$

1) $(dm)\,h = 18000$
2) $d\,(hm) = 18000$, u. s. w.

Diese Regel ist von Totalzahlen (§. 12, 13.) erwiesen. Und wenn die Totalzahlen Zähler von Brüchen, oder gebrochne Einheiten werden: so wird, in welcher Ordnung man sie auch braucht, nach den bekannten Regeln der Bruchrechnung, auch nichts in dem Producte verändert. Daher ist die Regel allgemein.

c) In der Multiplication des Ganzen wird jeder Theil multiplicirt. Also schließt man, (wenn $a + b - c = z$ ist,) eine jede der folgenden Gleichungen aus der ersten, nämlich aus

$$z\,m = 10000$$

1) $m\,a + m\,b - m\,c = 10000$
2) $(a + b - c)\,m = 10000$
3) $m\,(a + b) - m\,c = 10000.$

d) Es ist einerley, eine Zahl nach und nach durch die Factoren des Factors, oder durch den ganzen Factor auf einmal zu multipliciren. (§. 13.) Also weil $3 . 4 . 5 = 60$; so schließt man eine jede der folgenden Gleichungen aus einer jeden andern unter denselben.

60. 10 = 600.
3. 4. 5. 10 = 600.
3. 10. 5. 4 = 600. Siehe oben No. b.

e) Ein Bruch ist gleich einem Quotienten. (§. 26.) Also schreibt man nach Belieben

$\frac{16}{2} = 8$ oder $16 : 2 = 8$

$\frac{a}{b} = c$ oder $a : b = c$.

f) Die Ordnung der Divisoren, wodurch man nach und nach dividiren soll, ist gleichgültig, weil sie eine Art von Factoren sind. (§. 39). Also wählt man unter den Gleichungen

$$\frac{(100 : 10) : 5}{25} = X$$

$$\frac{(100 : 25) : 10}{5} = X$$

g) Es ist einerley, nach und nach durch verschiedene Divisoren, oder auf einmal durch ihr Product zu dividiren. (§. 19. No. 2.) Also wählt man unter

$$\frac{100 : 10}{25} : 5 = X \qquad \frac{100 : 5}{25} : 10 = X$$

$$\frac{100 : 50}{25} = X \qquad \frac{100 : 25}{5} : 10 = X$$

$$\frac{100}{1250} = X$$

h)

h) Die Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{ac}{bc}$, $\frac{a:c}{b:c}$ sind gleich (§. 31.) Also wählt man unter den Gleichungen, die aufeinander folgen

$$\left\{\frac{4}{6} \text{ oder } \frac{4.2}{6.2} \text{ oder } \frac{4:2}{6:2}\right\} \times 12 = 8.$$

i) Die Multiplication des Zählers ist der Division des Nenners, und die Multiplication des Nenners ist der Division des Zählers gleichgültig, (§. 34.). Also setzt man ein jedes der folgenden Zeichen nach Belieben für einander:

$$\text{entweder } \frac{ac}{b} \text{ oder } \frac{a}{b:c} \text{ oder } \frac{a}{b} \times c$$

$$\text{entweder } \frac{a:c}{b} \text{ oder } \frac{a}{bc} \text{ oder } \frac{a}{b} : c \text{ oder } \frac{a}{c} : b$$

$$\text{entweder} \left\{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right\} \text{oder} \left\{\frac{a}{d} \cdot \frac{c}{b}\right\} \text{oder } \frac{ac}{db} \text{ oder } \frac{a:b}{d:c} \text{ (§. 40.)}$$

$$\text{oder } \frac{a}{bd} \times c, \text{ oder } \frac{c}{bd} \times a, \text{ oder } \frac{ac}{b} : d, \text{ oder } \frac{ac}{d} : b. \text{ u. s. w.}$$

$$\text{entweder } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} \text{ oder } \frac{a:c}{b:d} \text{ oder } \frac{ad}{bc} \text{ (§. 40, 42.)}$$

k) Wegen der Verwandlung der Totalzahlen und vermischten Zahlen in Brüche sind folgende Gleichungen, (§. 30.).

$$a = \frac{ay}{y}. \quad \text{Und } a + \frac{c}{y} = \frac{ay + c}{y}.$$

Und

Und $b + \frac{b}{y} = \frac{by + b}{y} = \frac{(1 + y)b}{y}$.

Und $b - \frac{b}{y} = \frac{by - b}{y} = \frac{(y - 1)b}{y}$.

Und $\frac{b}{y} - b = \frac{b - by}{y} = \frac{(1 - y)b}{y}$.

l) Besonders ist der verschiedene Ausdruck der Einzahl, oder 1, merkwürdig. (Siehe auch §. 57.)

$1 = a:a = (1.1) = (1.1.1)$ u. s. w.

8) Durch Umkehrung der Zeichen, Plus und Minus, vor vielen Theilen eben desselben Gliedes, wenn man ein allgemeines Minuszeichen, welches nicht da war, und dessen Abwesenheit also so viel, als ein allgemeines Pluszeichen, bedeutete, voransetzt. (§. 53.) Z. E.

Man hat zu wählen aus den Gleichungen

$4S + 3D - 2M = 246.$
$4S - (2M - 3D) = 246.$

9) Durch eben solche Umkehrung der Zeichen Plus und Minus vor den Theilen, wenn man ein allgemeines Minuszeichen, welches voran steht, in ein allgemeines Pluszeichen verwandelt, oder, welches gewöhnlicherweise einerley ist, wenn man das allgemeine Minus-

zeichen wegläßt. Man wähle auch aus dieser Ursache unter den vorigen Gleichungen No. 8.

10) **Durch Versetzung eines Theils aus einem Gliede der Gleichung in das andere**, doch mit widrigem Zeichen, da Plus in Minus, und Minus in Plus verwandelt wird. Diese Regel gründet sich darauf, daß man (nach No. 5.) den zur Versetzung bestimmten Theil sowohl ihm selbst auf der einen Seite, als auch dem andern Gliede mit einem solchen Zeichen zufügen kann, daß auf der einen Seite, der einmal mit Plus, das andre mal mit Minus hingesetzte, Theil wegfällt, (No. 4.) auf der andern Seite aber einmal stehen bleibt. Z. E.

Aus der Gleichung $2M + D - 4 = 38.$

folgt 1) $2M + D = 38 + 4$ vermittelst der für Geübte zu überflüssigen Zwischengleichungen,

$$2M + D - 4 + 4 \text{ ist } 38 + 4.$$
$$2M + D = 38 + 4.$$

es folgt 2) $2M - 4 = 38 - D$ vermittelst der Zwischengleichung $2M + D - D - 4 = 38 - D$

$$= 2M - 4 = 38 - D.$$

11) **Durch Versetzung eines Factors, oder eines Divisors, welcher ein ganzes Glied der Gleichung angeht, in das andre Glied der Gleichung**, aber nach Verwandlung des Factors in einen Divisor, und des Divisors in einen Factor. Diese Regel gründet sich abermals auf Zwischen-

glei-

gleichungen, welche (laut No. 5 und 4.) richtig sind. Z. E. $bc = ad$. Also $\frac{bc}{a} = \frac{ad}{a}$. Also $\frac{bc}{a} = d$. Ein Geübter versetzt unmittelbar. So auch, wenn die ursprüngliche Gleichung diese ist, $\frac{bc}{a} = d$: so folgt, (indem man eine Zwischengleichung, $\frac{bc}{a} \times a = ad$, übergeht) unmittelbar $bc = ad$.

§. 56.

Eine algebraische Summe ist eine Zahl oder Grösse, deren Ausdruck in Ziffern oder Buchstaben, entweder aus mancherley Plustheilen oder Minustheilen, oder solchen vermischten Theilen besteht. Z. E. Wenn S ein Schock, M eine Mandel und D ein Dutzend bedeutet, und wenn man in dieser Bezeichnung Bequemlichkeit findet: so kann man die Zahl 340 auch so schreiben:

$$2S - 2M + S - 2D - M + 2\tfrac{1}{2}S + 79.$$

§. 57.

In solchen algebraischen Summen schreibt man, der Kürze wegen, das Product $a\,a$, lieber a^2; das Product $a\,a\,a$, lieber a^3. Die kleine Zahl nennt man den übergeschriebnen Exponenten. Daher ist $4.4.4 = 4^3$. Eine Zahl mit solchem Exponenten bedeutet das angezeigte Product, und heißt eine Dignität oder Potenz. Die erste Potenz der Zahl a, wird zuweilen geschrieben a^1, und ist nichts anders als a; aber die zweyte Potenz ist

das Product aa, oder a^2; die dritte aaa, oder a^3; die vierte aaaa, oder a^4, u. s. w.

Die zweyte Potenz einer Zahl heißt auch ihr **Quadrat**, die dritte ihr **Cubik**. Das Quadrat der Zweyzahl ist 2.2, oder 2^2 oder 4. Das Cubik derselben ist 2^3 oder 8. Das Quadrat der Dreyzahl ist 3^2 oder 9, ihr Cubik ist 3^3 oder 27.

Die Zahl, deren Quadrat eine andre Zahl ist, heißt die **Quadratwurzel** der andern; die Zahl, deren Cubik eine andre Zahl ist, heißt die **Cubikwurzel** der andern. Man sagt auch, **die zweyte, die dritte, die vierte Wurzel**, u. s. w. Von 16 ist 4 die Quadratwurzel, weil 4.4, oder 4^2 die Zahl 16 ist. Die Cubikwurzel von 27 ist 3. Denn 3^3 ist 27. Wenn nicht die Zahl, sondern die Wurzel, angezeigt werden soll, so setzt man ihr das **Wurzelzeichen** ($\sqrt{\ }$) vor. Z. E. $\sqrt[3]{64}$ ist nicht 64, sondern die dritte oder Cubische Wurzel davon, welche 4 ist, weil 64 aus 4.4.4 entsteht.

Merkwürdig ist es, daß alle **Potenzen und Wurzeln der Einzahl** ihr gleich, oder 1 bleiben. Denn $1^1 = 1^2 = 1^3 = 1^4$ u. s. w. $\sqrt[1]{1} = \sqrt[2]{1} = \sqrt[3]{1} = \sqrt[4]{1}$ und so weiter.

Die **Hauptsätze von Potenzen und Wurzeln** sind:

a) Gleichnamige Potenzen und Wurzeln heissen die zweyten unter einander, das ist, eine

quadrati-

quadratische mit quadratischen; so auch eine dritte oder cubische mit der cubischen; so auch eine vierte mit der vierten, u. s. w. kurz, wenn die Exponenten gleich sind. Nun versteht man den Grundsatz. Aus der Gleichheit zweyer, nur auf verschiedene Art ausgedrückter, Zahlen, folgt die Gleichheit aller ihrer beyderseitigen gleichnamigen Potenzen und Wurzeln. Und aus dieser letzten Gleichheit folgt die Gleichheit der ursprünglichen Zahlen. Z. E. Wenn ihr auch die Bedeutung der Zeichen $(\beta+\gamma)$ und ת nicht kennt, aber wenn ihr doch wißt, daß $(\beta+\gamma) =$ ת sey: so wißt ihr auch, daß $(\beta+\gamma)^2 =$ ת^2, daß $(\beta+\gamma)^{10} =$ ת^{10}; daß $\sqrt[2]{\beta+\gamma} = \sqrt[2]{}$ת; daß $\sqrt[m]{}$ת $= \sqrt[m]{\beta+\gamma}$. Und wenn ihr auf irgend eine Art wißt, daß irgend eine dieser letzten Gleichungen wahr ist; so schließt ihr auch sicher, daß (ohne Potenzzeichen und ohne Wurzelzeichen) ת $= \beta+\gamma$, oder $\beta+\gamma =$ ת, sey.

b) Gleichnamige Potenzzeichen und Wurzelzeichen an derselben Zahl, heben einander auf. Also ist $\sqrt[2]{4^2} = 4$. Ich will den allgemeinen Beweis geben. Sollt ihr setzen die dritte Potenz der, in ihre dritte Wurzel erniedrigten, Zahl a; so sollt ihr setzen $\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}$, das ist ein Product, welches, vermöge des ersten Begriffs von Potenz und Wurzel, die Zahl a ist. Und sollt ihr

setzen $\sqrt[3]{a^3}$, das ist die dritte Wurzel von der in ihre dritte Potenz erhöhten Zahl a, oder von dem Producte aaa; so ist a diese dritte Wurzel eben deßwegen, weil, wenn a factorenförmig dreymal gesetzt wird, aaa kömmt, dessen dritte Wurzel ihr setzen sollt. Nehmt anstatt des Exponenten, der hier 3 ist, irgend einen andern; so bleibt derselbe Beweis.

c) 1) **Die Potenz eines in Factoren zerfällten und so ausgedrückten Products, ist das Product der in dieselbe Potenz erhöhten einzelnen Factoren.** Z. E. $(4.3)^2 = 4^2.3^2$. Das erste ist 12 mal 12, oder 144. Das zweyte ist 16 mal 9, oder auch 144. Denn überhaupt $(abc)^2 = abc\ abc = aa\ bb\ cc = a^2\ b^2\ c^2$. Dieselbe Denkart überzeugt euch, wenn anstatt 2, auch irgend eine andre Zahl der Exponent ist. —— 2) **Die Wurzel eines Products ist das Product der in dieselbe Wurzel erniedrigten Factoren.** Z. E. $\sqrt[3]{8.27} = \sqrt[3]{8}\,\sqrt[3]{27}$. Das erste ist $\sqrt[3]{216}$, das ist 6; weil 6.6.6 das Product 216 giebt. Das andre aber (weil $\sqrt[3]{8}$ die Zahl 2, und $\sqrt[3]{27}$ die Zahl 3 ist) ist auch 6. Also ist beydes gleich. Der allgemeine Satz aber ist

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}$$

Der Beweis ist dieser: Man erhöhe beyde Glieder in die Potenz m; so giebt das erste Glied (laut No. b) das Product ab; das andre Glied aber giebt (laut

No. 1.

No. 1. dieses Absatzes) $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m \times \left(\sqrt[m]{b}\right)^m$ welches (laut No. b.) auch das Product ab ist. Also die gleichnamige Potenz beyder Glieder des allgemeinen Satzes giebt beyderseits etwas Gleiches, ist also beyderseits gleich; folglich sind auch gleich (laut No. a.) die beyden Glieder des allgemeinen Satzes, welcher war $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}$.

d) 1) **Die Potenz eines Bruchs** entsteht, (vermöge der Multiplicationsregel) wenn man den Zähler und den Nenner in die verlangte Potenz erhebt, und daraus einen neuen Bruch macht.

Z. E. $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2^3}{5^3}$ (nämlich $\frac{8}{125}$).

2) **Die Wurzel eines Bruchs** entsteht also, wenn ihr aus dem, in die verlangte Wurzel erniedrigten, Zähler und Nenner einen neuen Bruch macht.

Z. E. $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}$. Dieses sieht man unmittelbar. Sonst ist es auch leicht zu beweisen. Der vorgestellte allgemeine Satz ist nämlich

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

Der Beweis ist dieser. Erhöht beyde Glieder in die Potenz m; so wird (laut No. b.) aus dem ersten

sten Gliede die Zahl ab; und auch aus dem zweyten Gliede (laut No. 1. dieses Absatzes) wird ab. Daher ist die gleichnamige Potenz beyder Glieder gleich; folglich sind auch gleich (laut No. 2.) die beyden Glieder selbst.

§. 58.

In der algebraischen Schreibart bedarf man großer Vorsichtigkeit und einiger Hülfsmittel, um nicht zweydeutig zu werden, und nicht sich und andre zu verwirren. Ich will sie durch Exempel zeigen.

$c(a - b)$ oder $c\,\overline{a - b}$ ist etwas anders, als $ca - b$. In jenem ersten Falle wird der Factor c durch $(a - b)$, in dem letzten aber nur durch a multiplicirt.

$\frac{a + b - c}{d}$ ist $a + b - c$ ganz durch d dividirt; aber nicht, wenn geschrieben wird $\frac{a + b}{d} - c$, oder $a + \frac{b - c}{d}$

$\sqrt[m]{(a+b-d)}$ ist die Wurzel von dem ganzen $a+b-d$ aber nicht $\sqrt[m]{(a+b)}-d$. Man kann das Erste auch so schreiben: $\sqrt[m]{a+b-d}$, und das letzte $\sqrt[m]{a+b}-d$.

a+b:c

$a + b : c$ ist zweydeutig. In $\overline{a+b} : c$ oder in $(a+b) : c$ ist das Dividend $a+b$. In $a+(b:c)$ aber ist es nur b.

Ihr müßt nicht schreiben $a + b - c - d$, wenn das d von dem c abgehn soll, sondern alsdann $a + b - (c - d)$. Das erste könnt ihr aber auch so schreiben: $a + b - (c+d)$ (§. 51.)

$-2 + 5$ ist $+3$. Aber
$-(2+5)$ ist -7. (§. 51.)

§. 59.

Die in den meisten Fällen **nützlichste Ordnung der Theile einer algebraischen Summe** (§. 52.) ist, wenn man sich die Buchstaben, nach der Ordnung, wie sie im Alphabete folgen, vorstellt, a vor b, d vor f, u. s. w. wenn man ferner alle Theile, worinnen ein und derselbe früherer Buchstab vorkömmt, zuerst und beysammen setzt, und die Theile, worinnen einer und derselbe Buchstab vorkömmt, so ordnet, daß die höhere Potenz dieses Buchstabens vor der niedrigern (§. 50.) voransteht. **Exempel wohlgeordneter Summen:**

$5a + 3c - 2f + 10.$
$a^2 - 2ab + b^2 + b + g - 5.$
$5a^3 - 2a^2 + 3b^4 - 8b^2 + d^2 + 15.$
$a^4 + 10a^2b - 5a + b^3 - 3b^2 + 5b - c + 15.$

§. 60.

S bedeute wieder ein Schock, M eine Mandel oder 15, und D ein Dutzend. Nun betrachtet fol-

gende algebraische Summe, welche zusammen 340 beträgt:

$$2S - 2M + S - 2D + M + 2\tfrac{1}{2}S + 79 - \tfrac{1}{2}S.$$

Sie ist noch nicht gut geordnet, vielweniger so verständlich, als es seyn kann, (wenn man auch die Bedeutung der Buchstaben nicht wüßte,) ausgedrückt. Denn gleich viel Plus und Minus von einerley oder gleichbenamter Grössenart vernichtet sich einander (§. 53.). Was alsdann von gleichbenamter Grössenart übrig bleibt, und zerstreut steht, kann unter eine einzige Zahl gebracht werden.

Ihr findet z. E. $-2D$. Dabey ist Nichts weiter zu thun. Ihr findet aber $-2M+M$. Das ist ja kürzer $-M$, weil das eine positive M eins von den negativen 2 M zernichtet. Ihr findet ferner $+2S+S+2\tfrac{1}{2}S-\tfrac{1}{2}S$. Das sind ja zusammen 5 S. Alsdann findet ihr noch die reine Zahl 79. Die gute Ordnung ist also:

$-2D - M + 5S + 79$; das ist 340 nämlich
$-24 - 15 + 300 + 79$; ist diese Zahl 340.

Die Theile einer algebraischen Summe in solche gute Ordnung setzen und ihren Ausdruck abkürzen, das heißt **algebraisch addiren.** Die Regel davon ist also diese: Man vernichte gleich viele übrigens gleich benamte aber widrige Grössen, (§. 53.) und lasse nur ihren Rest, wenn eine davon grösser war, hinter demjenigen Zeichen stehen, welches die größre hatte. Die harmonischen gleichbenamten Grössen, wenn sie zerstreut sind, addire man, um sie kürzer

aus-

auszudrücken. Alsdann setze man die gebliebnen Summentheile, wohlgeordnet nach den Buchstaben (und, wenn welche da sind, auch nach der Ordnung der Potenzen §. 59.) zusammen: so hat man addirt, das ist verschiedne zusammengehörige Grössen auf die verständlichste Art, als eine einzige, zusammen gesetzt. Man wird freylich nicht Ursache haben, mit solcher Weitläuftigkeit zu verfahren, wenn man vorher weiß, daß S ein Schock, M eine Mandel, D ein Dutzend bedeute. Aber die Zahlenkunst hat oft mit unbekannten Zahlen, und mit ganzen Arten der Grössen zu schaffen, welche sie mit Buchstaben benennt. Es ist nur der Erläuterung wegen geschehen, daß ich bekannte Zahlnamen durch die Buchstaben angezeigt habe. Aber in der Zahlenkunst bedeutet D auch oft ein jedes Dividend, M eine jede mittlere Zahl, S eine jede Summe oder ein jedes Spatium. Alsdann ist die algebraische Addition allerdings nöthig. Vergeßt aber nicht, das Minus innerhalb der, schon mit Minus bezeichneten, negativen Theile in Plus zu verwandeln, (§. 53.). Denn gleich wie 16 — (8 — 3) die Zahl 16 — 5, oder 16 — 8 + 3 ist: so ist überhaupt $a - (b - c) = a - b + c$.

§. 61.

Man hat auch eine algebraische Subtraction. Wenn ihr sie ausüben wollt: so müßt ihr die Grösse dessen, was subtrahiret werden soll, (das ist den Abzug) dadurch verändern, daß ihr das Zeichen eines jeden Theils desselben, nämlich Plus

in Minus und Minus in Plus, verwandelt. Nach solcher Veränderung schreibt das, was aus dem euch vorgeschriebnen Abzuge geworden ist, als einen Theil zu der Summe hinzu, von welcher ihr subtrahiren solltet. Nun addirt, und bringt in Ordnung (§. 54.): so habt ihr subtrahirt. Denn die Subtraction ist gewiß richtig, wenn ihr auf solche Art verfahrt, daß die Addition des Abzuges und des Restes die Summe wieder herstellt. Nun erinnert euch, daß ihr, nach meiner Vorschrift, um zu subtrahiren, jeden Theil des Abzuges, nicht wie er war, sondern mit einem widrigen Zeichen in die Summe gesetzt habt. Der Abzug ist, z. E. aus $+ a - b$ in $- a + b$ verwandelt, und nach dieser Aenderung als ein neuer Theil zu der alten Summe hinzugesetzt. Setzt ihr nun von neuem den alten unveränderten Abzug hinzu; so heben $+ a$ und $- a$, so auch $- b$ und $+ b$ sich einander auf; die alte vor der Subtraction dagewesene Summe wird wieder hergestellt; folglich ist die Subtraction richtig geschehn. Z. E.

Die Summe	$-2D - M + 5S + 79 = A$
Der mit dem Generalzeichen bezeichnete Abzug.	$-(+D - 2M + 2S + 90) = -X$
Nach veränderten Zeichen	$-D + 2M - 2S - 90 = B$
Unterschied A -- X, durch die Addition A + B gefunden	$-3D + M + 3S - 11 = U.$

Wenn

Wenn ein Geübter keine Verwirrung fürchtet; so darf er den Abzug nicht zweymal schreiben, sondern denselben unverändert lassen, sich aber vorstellen, was folgen würde, wenn er die Zeichen desselben umkehrte, und alsdenn die Summe und den so veränderten Abzug addirte: hieraus wird er sich diese Regel machen: 1) Gleichbenamte Grössen der Summe und des (NB. unveränderten) Abzuges hinter widrigen Zeichen werden addirt, und das Zeichen, das in dem Summentheil war, vorgesetzt. 2) Sind aber gleiche Zeichen in der Summe und dem Abzuge, so wird subtrahirt, und das Zeichen des Summentheils beybehalten, wenn der Summentheil grösser war; umgekehrt aber, wenn er der kleinere war. Z. E.

Die Summe	$-2D - M + 5S + 79$
Der unveränderte Abzug	$+D - 2M + 2S + 90$
Rest, wie zuvor	$-3D + M + 3S - 11.$

§. 62.

In der algebraischen Multiplication müßt ihr, wie in der gewöhnlichen, jeden Theil des einen Factors durch jeden Theil des andern multipliciren, das ist, Specialproducte machen, und sie durch Addition in ein ganzes Product zusammenordnen. Sind nun die Zeichen der beyden Factorentheile, die durch einander multiplicirt werden, einerley, beyde Plus oder beyde Minus; so bekömmt das Specialproduct das Zeichen Plus: sind aber die Zeichen der Specialfactoren verschieden, das

eine

eine Plus, das andere Minus; so bekömmt das Specialproduct das Zeichen Minus. Kürzer, des Gedächtnisses halber: **widrige Zeichen geben Minus, harmonische aber Plus.** Erst Exempel, hernach Beweis. Es sey $a = 10$; $b = 5$; $c = 1$; $d = 2$. Es sey zu multipliciren $a + b - c$ durch $b - d$.

$a + b - c$	$10 + 5 - 1$ (d. ist 14)
$+ b - d$	$+ 5 - 2$ (d. ist 3)
$+ ba + b^2 - bc$	$+ 50 + 25 - 5$
$- da - db + dc$	$- 20 - 10 + 2$
$ba - da + b^2 - bc - db + dc.$	$+ 30 + 15 - 3$ (oder 42).

Die Regel, daß in der Multiplication harmonische Zeichen der Factoren das Zeichen Plus, widrige Zeichen der Factoren aber das Zeichen Minus dem Producte geben, enthält folgende Sätze:

1) **Plus durch Plus giebt Plus.** Daran zweifelt Niemand. Denn gleich wie 3 mal 2, die Zahl 6; und 2 mal 30 die Grösse 60 hervorbringt; so ist dieses in allen Fällen wahr, was ihr auch für Zahlen anstatt 3, und 2 setzen wollt.

2) **Plus durch Minus, oder Minus durch Plus, giebt Minus.** Denn das sieht man wohl, daß es nicht Plus geben könne, weil Plus durch Plus dem Producte das Zeichen Plus giebt, und weil die Veränderung des Factors doch einen Unterschied in dem Producte geben muß. Da nun Plus durch Minus, oder Minus durch Plus, nicht Plus giebt: so muß es Minus geben, weil kein

dritt

dritter Fall da ist. Mehr Einsicht oder Uebung des Verstandes aber giebt folgender Beweis: Die negative Grösse bleibt negativ, der Defect bleibt Defect; wenn sie ein oder etliche mal entweder ganz, oder zum Theil, (nach der Regel, die man aus der Grösse des andern Factors erkennt) gesetzet werden. Also muß ein Minustheil, multiplicirt durch ein Plustheil einer Zahl, allerdings negativ oder ein Minustheil bleiben. So auch, wenn die Grösse, welche multiplicirt wird, zwar eine positive Grösse oder ein Plustheil ist, aber durch einen Minustheil einer Zahl multiplicirt werden soll; so stelle man sich in Gedanken vor, daß man erst durch diesen Minustheil, hernach aber durch einen eben so grossen Plustheil multipliciren sollte. In diesem Falle würde man zusammen Nichts gethan haben, weil $-a+a$ nichts ist, und also auch kein Product giebt. Die Multiplicationen durch $-a$ und durch $+a$ geben also widrige Producte, die sich einander aufheben. Da nun die positive Grösse b, durch $+a$ multiplicirt, das Product ab oder $+ab$ giebt; so muß dieselbe positive Grösse b, multiplicirt durch $-a$, das Product $-ab$ geben.

3) **Minus durch Minus giebt Plus.** Z.E. -3 multiplicirt durch -4, ist $+12$ oder 12. Denn $-b$ durch $+a$, giebt $-ab$, laut des Vorigen. Nun ist aber gewiß, daß $-b$, multiplicirt durch $+a-a$, Nichts seyn würde. Also wird das Product $-ab$ (welches aus $-b$ durch $+a$ entsteht) durch das Product, welches aus $-b$

durch

durch — a entstehen kann, aufgehoben; daher muß dieses letzte Product dem Producte — a b widrig, das ist, + a b seyn.

§. 63.

Wenn zu einem algebraisch ausgedrückten Producte und einem von seinen zweyen Factoren der zweyte Factor gesucht wird; so übt man die **algebraische Division** aus, deren Regel, gleich wie in der gewöhnlichen, diese ist, daß man jeden Theil des Dividenden durch den ganzen Divisor dividire, und die Quotiententheile, als einen einzigen ganzen Quotienten, auf die verständlichste Art zusammensetze. Der gefundene Quotient aber ist alsdann der richtige, wenn er, multiplicirt durch den Divisor, das Dividend wieder herstellt. Auch hier muß die Regel gelten: **harmonische Zeichen des Dividenden und Divisors geben dem gesuchten Quotiententheile das Zeichen Plus; widrige aber geben ihm das Zeichen Minus.** Denn wenn erstlich die Aufgabe ist: + b : + z; so muß die Quotientengrösse, oder q, das Zeichen Plus haben, das ist, + q seyn, weil (— q) . (+ Z) nicht eine positive Grösse, wie das Dividend ist, sondern (§. 62.) eine negative geben würde. Wenn zweytens die Aufgabe ist — b : — z; so muß auch + q erfolgen, weil (— q) . (— z) nicht eine negative Grösse, wie das Dividend ist, sondern (§. 62.) eine positive geben würde. Wenn drittens die Aufgabe ist + b : — z; so muß — q erfolgen, weil (+ q) . (— z) nicht eine positive Grösse

Grösse, wie das Dividend ist, sondern (§. 61.) eine negative geben würde. Wenn endlich die Aufgabe ist $-b : +z$; so muß $-q$ erfolgen, weil $(+q) \times (+z)$ nicht eine negative Grösse, wie das Dividend ist, sondern (§. 61.) eine positive geben würde. Also $a^2 - b^2 + c$, durch $a - b$, wird folgender maßen dividiret. Ich verstehe aber, der Erläuterung halber, unter a die Zahl 10, unter b die Zahl 4, unter c die Zahl 2. So ist $(a^2 - b^2 + c) : a - b = (100 - 16 + 2) : 10 - 4 = 86 : 6 = 14\frac{2}{6}$.

$$
\begin{array}{r|l}
+a^2 - b^2 + c & \\
(+a - b) & \\
+a^2 - ba & \\
\hline
-b^2 + ab + c & +a+b+\frac{c}{a-b} \\
(-b + a) & \\
-b^2 + ab & \\
\hline
+c \text{ Rest.} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
+10^2 - 4^2 + 3 & \\
(+10 - 4) & \\
+10^2 - 4 . 10 & \\
\hline
-4^2 + 4 . 10 + 3 & +10+4+\frac{3}{10-4} \text{ od. } 14\frac{3}{6} \\
(-4 + 10) & \\
-4^2 + 4 . 10 & \\
\hline
+3 \text{ Rest.} &
\end{array}
$$

Zusatz.

Hier muß ich etwas aus §. 57 wiederholen, um etwas Versäumtes zuzusetzen. Denn obgleich nicht alles gleich faßlich ist: so muß es doch aus andern methodischen Ursachen zusammen stehen. Durch die Zurückweisung bey vorkommenden Exempeln wird die Schwierigkeit verschwinden. Also zur Sache!

Welche Zahl n auch bedeuten mag; so bedeutet n^0 allezeit n : n, oder 1. Ferner, n^{-1}, n^{-2}, n^{-3}, bedeutet $\frac{1}{n^1}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$, und so weiter. Z. E. 4^{-1}, 4^{-2}, 4^{-3}, sind $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$. Die Ursache will ich zu rechter Zeit erklären.

Soll ein Product aus solchen Factoren gemacht werden, welche allesammt als Potenzen einer und derselben Zahl n bezeichnet sind; z. E. das Product $4^2 . 4^3$, oder das Product $n^p n^q$: so ist dieses Product dieselbe Zahl in derjenigen Potenz, deren Exponent die Summe von den Exponenten der Factoren ist. Z. E. $4^2 . 4^3 = 4^5 = 4 . 4 . 4 . 4 . 4 . = 1024$. Also auch $n^p\ n^q = n^{p+q}$. Dieses erhellet unmittelbar aus der Sache. Also wenn man Potenzen derselben Zahl dividiren soll; so muß man den Exponenten des Divisors von dem Exponenten des Dividenden subtrahiren, und die Zahl n mit demjenigen Exponenten setzen, welcher die Differenz ist. Z. E. $2^4 : 2^2 = 2^{4-2} = 2^2 = 4$. Und überhaupt $n^p : n^q = n^{p-q}$.

Denn $(n^p : n^q)\ n^q = n^p$.
Und $(n^{p-q})\ n^q = n^p$.
Also $n^p : n^q = n^{p-q}$.

Also wenn man eine Zahl, die schon einen Potenzialexponenten hat, zu einer Potenz erheben soll; so multiplicire man die Exponenten beyder Potenzen, und setze die Zahl mit dem-

jenigen

jenigen Exponenten, welcher das Product ist.
Z. E. $(2^3)^2 = 2^6$.
Und überhaupt $(m^n)^p = m^{np}$. Denn

$(m^n)^p = m^n m^n m^n \ldots$ so vielmal factorenmässig neben einander gesetzt, als p Einheiten hat. Es muß also (um das Product, welches $(m^n)^p$ ist, zu machen,) zu dem Exponenten der Grösse m^n, derselbe Exponent n eben so viel mal addirt, das ist, durch p multiplicirt werden. Also $(m^n)^p = m^{np}$.

Wenn man also eine Wurzel aus einer Zahl, die schon durch einen Potenzialexponenten bezeichnet ist, ziehen soll: so dividirt man den Potenzialexponenten durch den Wurzelexponenten. Z. E. $\sqrt[2]{4^6} = 4^{6:2} = 4^3 = 64$.

Und Ueberhaupt $\sqrt[m]{n^p} = n^{p:m}$. Denn

$(\sqrt[m]{n^p})^m = n^p$ (§. 57.)

$(n^{p:m})^m = n^p$. Also $\sqrt[m]{n^p} = n^{p:m}$.

Daher kömmt es, daß (da jede Zahl $Z = Z^1$ ist, und also wenigstens den Potenzialexponenten 1 hat,) man jede Wurzel einer Zahl, z. E. $\sqrt[3]{27}$ auch durch einen gebrochnen Potenzialexponenten ausdrückt. Z. E. $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{27^1} = 27^{1:3}$.
Also ist $\sqrt[2]{4^6} = 4^{6:2} = 4^3 = 64$.

Also sind die Potenzen und die Potenzialexponenten (im weiten Verstande) von mancherley Art: 1) total und positiv, z. E. $4^2 = 16$. 2) total und negativ, z. E. $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$. 3) gebrochen und positiv, als $2^{4:2} = 2^2 = 4$. 4) gebrochen und negativ, z. E. $2^{-(4:2)} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

Von allen diesen Potenzen im weiten Verstande ist es wahr, daß ihr Product die Summe, und daß ihr Quotient die Differenz der Potenzialexponenten habe. Z. E.

$m^n\, n^p = m^{n+p}$. Und $m^n : m^p = m^{n-p}$.
$m^{-n}\, m^p = m^{p-n}$. Und $m^{-n} : m^p$
$= m^{-(n+p)} = m^{-n}\, m^{-p} = m^{-n-p}$.
Und $m^n : m^{-p} = m^{n+p}$. Und $m^{\frac{1}{2}}\, m^2 =$
$m^1 = m$. Und $m^{\frac{1}{2}} : m^2 = m^{\frac{1}{2}-2} = m^{-1\frac{1}{2}}$
$= m^{-(3:2)}$. Und $m^{\frac{2}{3}}\, m^{-p} = m^{(\frac{2}{3}-p)}$.
Und $m^{2:3} : m^{-p} = m^{(2:3)+p}$.

Alles dieses erfodert keinen andern Beweis, als daß dieses mit den Regeln der vier algebraischen Rechnungsarten übereinkömmt; daß man diese Arten der Bezeichnung so versteht, und in jedem Falle die so bezeichneten Grössen darnach beurtheilt, für gleich oder für ungleich, für grösser oder für kleiner hält, wie es diese Bezeichnung mit sich bringt.

Eben

Eben so allgemein ist die Regel von Setzung der Wurzeln aus allen diesen Potenzen im weiten Verstande, und von Verwandlung einer Potenz in eine andre Potenz. Z. E. $\sqrt[2]{16} = 16^{1:2}$. Und $(16^{1:2})^3 = 16^{3:2} = \sqrt[2]{16^3} = \sqrt[2]{16 . 16 . 16} = \sqrt[2]{4096}$. So auch $(2^{-4})^2 = 2^{-8} = \frac{1}{256}$. Also auch $(2^{-2})^{-3} = 2^6$. Dieß letzte Exempel will ich statt vieler erklären. Es ist $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$. Und $(\frac{1}{4})^{-3} = \frac{1}{(1:4)^3} = \frac{1}{1:4^3} = \frac{4^3}{1} = 4^3 = (2^2)^3 = 2^6$.

Es ist laut des vorigen $\sqrt[2]{32} = \sqrt[2]{16 . 2} = \sqrt[2]{4^2 . 2} = \sqrt[2]{4^2}\,\sqrt[2]{2} = 4\,\sqrt[2]{2}$. Also überhaupt $\sqrt[m]{p^q\, n^m} = n\,\sqrt[m]{p^q} = n\, p^{q:m}$. Dieses kann man nennen die Rationalmachung oder Entwurzelung der Factoren, (nämlich nach Möglichkeit). Das Gegentheil ist, wenn man Factoren, die nicht Wurzelgrössen waren, zu Wurzelgrössen macht. Z. E. $4\,\sqrt[2]{20} = \sqrt[2]{4^2}\,\sqrt[2]{20} = \sqrt[2]{16}\,\sqrt[2]{20} = \sqrt[2]{16 . 20} = \sqrt[2]{320}$.

Uebrigens erfodert zuweilen der Zweck, daß wir die gebrochnen Exponenten verschiedner

 Poten-

Potenzen zu einem Nenner bringen. Z. E. Das Product $m^{3:2}\ n^{1:3} = m^{9:6}\ n^{2:6} = \sqrt[6]{m^9}\ \sqrt[6]{n^2} = \sqrt[6]{m^9\ n^2}$.

VI.

Fortsetzung in algebraischen Lehren und Exempeln.

§. 64.

Die vier algebraischen Rechnungsarten, (Addition, Subtraction, Multiplication und Division,) nebst Verwandlung der Potenzen in Wurzel, (§. 57.) und der Wurzel in Potenzen, sind nöthig, unbekannte Grössen, welche mit bekannten in Gleichungen (§. 54.) vereinigt stehen, sich bekannt zu machen, und allgemeine Formeln zu setzen, wie Zahlen von Dingen einer gewissen Art gefunden werden, wenn sie mit Zahlen von Dingen andrer Art, die uns früher bekannt werden können, durch Gleichungen vereinigt sind.

Eben diese Entdeckung unbekannter Zahlen oder Grössen und allgemeiner Formeln ist (§. 51.) der Zweck der Algebra. Es muß aber etwas von den unbekannten Zahlen oder Grössen bekannt seyn, woraus man schliessen kann, welche sie sind. Dieses Etwas heißt die Materie zu Gleichungen, weil es unmöglich ist, ohne Gleichungen etwas von Zahlen oder Grössen zu schliessen. Eine solche Materie

Materie ist z. E. Folgendes: Ein Kaufmann hat bey Anfange seines Handels eine gewisse Summe Geldes, welche in Thalern X heissen soll; er legt bey Anfang jedes Jahres 1000 Thaler zur Haushaltung beyseite; gewinnt in jedem Jahre das Drittheil dessen, was er bey Anfang des Jahres zu seinem Handel bestimmte; und war nach Verlauf dreyer Jahre doppelt so reich, als er anfangs war. Hieraus läßt sich die Zahl X durch Arbeit an Gleichungen bestimmen.

Nämlich die Zahl X weniger 1000 Thaler war dasjenige, was er zu seiner Handlung anfangs anlegte. Diese Summe ward am Ende des ersten Jahres um ein $\frac{1}{3}$ grösser, folglich durch $1\frac{1}{3}$ multiplicirt worden. Das Product, welches heraus kömmt, heisse m. Er hatte am Anfange des zweyten Jahres m weniger 1000 Thaler wieder zur Handlung gebraucht, und diese Summe war am Ende des zweyten Jahres aus gleicher Ursache durch $1\frac{1}{3}$ multiplicirt worden. Dieses Product heisse n. Er legte n weniger 1000 Thaler wieder zur Handlung an, und diese Summe war am Ende des dritten Jahres wieder durch $1\frac{1}{3}$ multiplicirt, und dadurch das Doppelte seines Capitals oder 2 X geworden. Seht, das ist eine Materie zu Gleichungen, die durch die bequeme Benamung schon einigermassen bearbeitet ist.

Die Gleichungen selbst sind nun folgende:

$$(x - 1000) \cdot (1 + \tfrac{1}{3}) = m.$$
$$(m - 1000) \cdot (1 + \tfrac{1}{3}) = n.$$
$$(n - 1000) \cdot (1 + \tfrac{1}{3}) = 2x.$$

Wenn man diese Gleichungen vergleicht: so sieht man, daß man nur die kürzeste Schreibart für das erste Glied der Gleichung wählen dürfe, um der ganzen Gleichung zu entbehren. Denn, weil $(x - 1000)\, 1\frac{1}{3}$ ist $= m$; so konnte man die zweyte Gleichung alsobald so machen:

$$((x - 1000)\ 1\tfrac{1}{3}, - 1000) \,.\, 1\tfrac{1}{3} = n.$$

Und weil das erste Glied dieser zweyten Gleichung im kürzerem Ausdrucke nach Berechnung ist

$$\left.\begin{array}{l} \text{erstlich } + 1\tfrac{1}{3}\, x \\ \text{zweytens} - 1\tfrac{1}{3} \times 1000 \\ \text{drittens} - 1000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = 1\tfrac{1}{3}\, x - 2000 - \tfrac{1}{3} \times 1000 \\ = 1\tfrac{1}{3}\, x - 2333\tfrac{1}{3} \end{array}$$

welches durch $1\frac{1}{3}$ multiplicirt werden soll, und dadurch wird $\frac{16}{9}\, x - 3111\, \frac{1}{9}$; so kann die dritte Gleichung, welche war $(n - 1000) \times 1\frac{1}{3} = 2\, X$, verwandelt werden in

$$\left(\frac{16}{9}\, X - 3111\, \frac{1}{9}\right) - 1000) \,.\, 1\tfrac{1}{3} = 2\, X,$$

oder in $\frac{64}{27}\, X - 5481\, \frac{13}{27} = 2\, X.$

In dieser Gleichung ist eine Anzahl von X auf der einen Seite (nach einem gewissen Abzuge, der geschehen soll,) einer andern Anzahl von X, (nämlich 2 X) die auf der andern Seite stehen, gleich. Dadurch also lernt man X noch nicht kennen. Aber man bringe alles, was X ist, auf die eine Seite.

Z. E. aus der Gleichung $\frac{64}{27}\, X - 5481\, \frac{13}{27} = 2\, X$

folgt (beyderseits 2 x subt.) $\frac{64}{27}\, X - 2\, X - 5481\, \frac{13}{27} = 0$

(beyderseits $5481\frac{13}{27}$ add.) $\frac{64}{27}\, X - 2\, X = 5481\frac{13}{27}.$

Und

Und (nach Einrichtung) $(\frac{64}{27} - \frac{54}{27})X = \frac{148000}{27}$

Beyderseits durch 27 multiplicirt $10X = 148000$

Beyderseits durch 10 dividirt $X = (148000 : 10)$

Also $X = 14800$

Nun ist X bekannt, nämlich als 14800 Thaler. Denn man hat dasjenige, was anfangs bekannt gemacht wurde, oder die Materie der Gleichung, durch Zeichen ausgedrückt, welche dasselbe bedeuteten. Dadurch wurde sie in Gleichungen verwandelt. Die Gleichungen selbst aber verwandelte man nur auf eine solche Art, daß man immer neue Gleichungen bekam, und unter diesen auch die letzte, welche zeigte, was X war.

Wenn man also nur eine einzige unbekannte Zahl suchen soll: so kömmt es nur darauf an: 1) die Materie in eine Gleichung zu verwandeln; 2) alle Setzungen der unbekannten Grösse auf eine Seite, und daselbst in Ordnung zu bringen; 3) alsdann dieselbe von den bekannten so zu trennen, daß sie allein auf der einen Seite und lauter bekannte Grössen auf der andern Seite stehen. Denn sobald der **Werth** der unbekannten Grösse X (das ist dasjenige, was ihr gleich ist) in bekannten Grössen vor Augen steht: so ist X bekannt. Man merke hier die Bedeutung des Worts **Werth** (oder Valeur,) denn ich werde es oft brauchen.

§. 65.

Durch die Materie zu einer einzigen Gleichung, in welcher eine einzige unbekannte Zahl vorkömmt, (§. 64.), kann uns nur eine einzige unbekannte Grösse oder Zahl bekannt werden. Denn kämen 2 unbekannte Grössen darinnen vor, und man brächte die eine auf die eine Seite: so wäre auf der andern Seite noch etwas Unbekanntes, wodurch der Werth der ersten unbekannten Grösse eben so wenig bekannt werden könnte, als wenn man ein Spanisches Wort demjenigen, der kein Französisch verstünde, durch Redensarten, worinnen etwas Französisches vorkäme, erklären wollte. Hätten wir die einzige Gleichung $XY = 12$, so daß X und Y beyde unbekannt wären: so würde man nichts hervorbringen, als $X = \frac{12}{Y}$ und $Y = \frac{12}{X}$, wodurch keine der unbekannten Zahlen bekannt würde, indem die Gleichung wahr wäre, von den Zahlen 4 und 3; von 6 und 2 und von mehren.

Aber man wird bald sehen, daß man 2 unbekannte Grössen entdecken könne, wenn man 2 Fundamentalgleichungen hat, worinnen sie vorkommen. Ich sage Fundamentalgleichungen, das sind solche, davon die eine nicht aus der andern folgt. Z. E. Die Gleichungen $XY = 12$; und $\frac{12}{Y} = X$, folgen eine aus der andern, sind also nicht zwey Fundamentalgleichungen,

gen, sondern nur eine einzige. Aber die Gleichungen $X + Y = 12$, und $Y : X = 3$, sind fundamental. Man verfährt alsdann, um X und Y zu entdecken, auf folgende Weise, welche ich erstlich durch das Exempel, hernach durch die Lehre zeigen will.

Die Gleichung A ist, $X + Y = 12$.

Die Gleichung B ist, $Y : X = 3$.

Werth von X aus A ist, $X = 12 - Y$, das ist die Gleichung C.

Werth von X aus B ist, $X = Y : 3$, die Gleichung D.

Beyde Werthe als gleich, $12 - Y = Y : 3$, oder die Gleichung E.

Folgerungen F. $12 = (Y : 3) + Y$

$12 = (Y : 3) + 1\,Y$

$12 = \frac{1}{3}\,Y + 1\,Y$

$12 = 1\frac{1}{3}\,Y$

$12 = \frac{4}{3}\,Y$

$12 : (4 : 3) = Y$

$Y = 9$.

Diesen Werth von Y, nämlich 9, setzt man anstatt des Y in eine der Fundamentalgleichungen.

Z. E. in A; so wird $X + 9 = 12$.

Also $X = 12 - 9$.

Oder $X = 3$.

Und

Und diese Entdeckung, daß $Y = 9$, und $X = 3$ sey, ist auch nach der Probe wahr, weil, wenn man $9 + 3$ addirt, 12; und wenn man 9 durch 3 dividirt, 3 kommen.

Die allgemeine Lehre also, wenn man aus 2 Fundamentalgleichungen eine unbekannte Zahl finden soll, ist: 1) Nennt eine unbekannte Zahl X, die andre Y; 2) schreibt die Fundamentalgleichungen, z. E. A und B, wie oben. 3) Bringt X auf die eine Seite durch Veränderung der Gleichung A; oder mit andern Worten, macht den Werth von X aus der Gleichung A. (Man sehe die Gleichung C.) 4) Macht den Werth von X aus der Gleichung B. (Man sehe die Gleichung D.) 5) Setzet als gleich die beyden Werthe von einerley Sache, wie in der Gleichung E. 6) Nun bringet Y durch Folgerung (sehet F.) auf eine Seite, daß es bekannt werde. 7) Setzt den neu bekannt gewordnen Werth des Y anstatt des Y in eine der Fundamentalgleichungen; und macht abermal, wenn es nöthig ist, Folgerungen, daß X auf eine Seite komme, und sein Werth bekannt werde.

Nur noch ein Exempel dieser Art: Ein Knabe hatte Pfenninge an Anzahl X, ein Mädchen auch welche, aber an Anzahl Y. Jener sagte zu diesem: Gieb mir 2 von den deinigen, so habe ich so viel, wie du. Das Mädchen antwortete: Gieb du mir 2 von den deinigen: so habe ich doppelt so viel, als du. Wie werden nun aus dieser Materie die Zahlen X

und

und Y gefunden? Die Fundamentalgleichungen sind:

$$X + 2 = Y - 2$$

$$\text{und } Y + 2 = 2\,(X - 2.)$$

Die beyden Werthe von X sind:

$$X = Y - 4 = \frac{Y}{2} + 3.$$

Folgerungen sind: $Y = \frac{Y}{2} + 7.$

$$Y - \frac{Y}{2} = 7.$$

$$\frac{Y}{2} = 7. \quad Y = 14.$$

Also wird die erste Fundamentalgleichung, wenn man den Werth von Y einträgt, folgende:

$$X + 2 = 14 - 2.$$

$$\text{Also } X = 14 - 4 = 10.$$

Man kann aber auch durchgängig, mit den Fundamentalgleichungen, worinnen X und Y sind, etwas anders verfahren. Man macht aus der Gleichung A den Werth X, und setzt denselben in B, anstatt des X, und folgert alsdann weiter. Z. E. die Gleichung A sey $X - Y = 5$. Und die Gleichung B sey $X + Y = 19$. Also $X = 5 + Y$. Also $5 + Y + Y = 19$. Also $5 + 2\,Y = 19$. Also $19 - 5 = 2\,Y$. Also $Y = 7$. Und $X = 12$.

Wenn derjenige, der die Materien zu den Gleichungen giebt, unmögliche Beschaffenheiten

heiten von Zahlen voraussetzt; so wird dieses gleichfalls durch die Arbeit an den Gleichungen entdeckt. Z. E. Wenn Jemand verlangte, zwey Totalzahlen, X und Y, (davon eine jede nicht unter 1 seyn kann) zu wissen, deren Multiplication durch einander die Zahl 12; und deren Quotient, nämlich $\frac{X}{Y}$, die Zahl 16 geben sollte: (ich nehme mit Fleiß ein sehr in die Augen fallendes Exempel) so folgte aus den Fundamentalgleichungen, welche sind

$$XY = 12, \text{ und } X : Y = 16,$$

dieses: $X = \frac{12}{Y}$ und $X = 16Y$. Das ist, $\frac{12}{Y} = 16Y$.

Folglich sollte Y seyn $= 12 = 16Y^2$.

Also $Y^2 = \frac{12}{16}$.

Also $Y = \sqrt{\frac{12}{16}} = \frac{\sqrt{12}}{4}$.

Es kann aber $\sqrt{12}$ nicht einmal 4 seyn, weil 4^2 schon 16 sind. Folglich ist $\frac{\sqrt{12}}{4}$ (welches Y seyn soll) weniger als 1; und dieser Erfolg zeigt, daß X und Y nicht möglich sind. Doch mehr von schweren irrigen Fragen in dem Folgenden.

§. 67.

Wenn der Werth von Y sich ohne Schreiben und ohne vieles Nachdenken aus der Verbindung,

worinnen

worinnen Y mit X und mit bekannten Zahlen steht, ausdrücken läßt; so wählt ein Geübter diesen Ausdruck; wodurch 2 Fundamentalgleichungen eine einzige, und zwey unbekannte Zahlen, X und Y, eine einzige, nämlich X, werden. Man hat oben (§. 64.) die Fundamentalgleichungen, $X + Y = 12$, und $Y : X = 3$, behandeln sehn; woraus folgte, X wäre 3, und Y wäre 9. Ein Geübter hätte alsobald gesetzt: $\frac{12 - X}{X} = 3$. Also $12 - X = 3X$. Also $12 = 4X$. Also $X = (12 : 4) = 3$. Alsdann hätte er die Zahl Y als $12 - X$, das ist, als $12 - 3$, das ist, als 9, angesehn.

§. 68.

Die Anzahl der Fundamentalgleichungen, (§. 65.) welche euch die Materie an die Hand giebt, muß gleich seyn der Anzahl unbekannter Grössen, wornach gefragt wird, oder welche ihr suchen sollet, oder wollet, und welche ohne Vereinigung mit andern unbekannten Grössen in der gesagten Anzahl von Gleichungen vorkommen. Eine solche Gleichung macht nur die Entdeckung einer einzigen unbekannten Zahl möglich. Aus 2 kann man 2, aus 3 kann man 3, aus 4 nur 4, u. s. w. entdecken. Man sehe erst ein Exempel.

Materie

Materie zu Gleichungen. Ein Kaufmann verkaufte das erste mal (doch immer zu gleichen Preisen)

4 Last Haber à 30 Rthlr.	—	120 Rthlr.
8 Last Gerste à 40	— —	320 —
6 Last Roggen a 50	— —	300 —
2 Last Waitzen à 60	— —	120 —
		860 Rthlr.

das andre mal

3 Last Haber à 30	— —	90 Rthlr.
3 Last Gerste à 40	— —	120 —
1 Last Roggen à 50	— —	50 —
10 Last Waizen à 60	— —	600 —
		860 Rthlr.

das dritte mal

6 Last Haber à 30	— —	180 Rthlr.
5 Last Gerste à 40	— —	200 —
5 Last Roggen à 50	— —	250 —
4 Last Waitzen à 60	— —	240 —
		870 Rthlr.

das vierte mal

2 Last Haber à 30	— —	60 Rthlr.
2 Last Gerste à 40	— —	80 —
3 Last Roggen à 50	— —	150 —
8 Last Waitzen à 60	— —	480 —
		770 Rthlr.

Ein andrer Kaufmann erfährt, wie viel von jeder Art Getraide jener jedesmal verkauft, und was er für

für eine Hauptsumme für alles jedesmal eingehoben, auch daß er jede Getraide-Art das eine mal nicht theurer, als das andre mal verkauft habe; aber den bestimmten Preis für die Last jeder Art erfährt er nicht, und will also wissen

X den Preis für die Last Haber,
Y den Preis für die Last Gerste,
Z den Preis für die Last Roggen,
W den Preis für die Last Waitzen.

Fundamentalgleichungen:

A) $4X + 8Y + 6Z + 2W = 860$
B) $3X + 3Y + 1Z + 10W = 860$
C) $6X + 5Y + 5Z + 4W = 870$
D) $2X + 2Y + 3Z + 8W = 770.$

Formel, die Fundamentalgleichungen zu gebrauchen.

A) Die erste Fundamentalgleichung,
B) Die zweyte,
C) Die dritte,
D) Die vierte, u. s. w. die unbekannten Zahlen sind X, Y, Z und W. Es folgen gemachte Gleichungen.

E) Werth von X aus A.

F) gemacht aus B sonder X
G) gemacht aus C sonder X
H) gemacht aus D sonder X.

I) Der Werth von Y aus F

K) gemacht aus G, auch sonder Y

L) gemacht aus H, auch sonder Y.

M) Der Werth von Z aus K.

N) gemacht aus L, auch sonder Z.

O) Der bekannte Werth von W aus N.

P) Der bekannte Werth von Z, aus M durch O.

Q) Der bekannte Werth von Y, aus I durch P und O.

R) Der bekannte Werth von X aus E, durch Q, P, O.

Bey Anwendung dieser Formel wird vorausgesetzt, daß man eine Gleichung erst zu dem kürzesten Ausdrucke bringe, ehe man sie weiter braucht. Also:

Fundamentalgleichungen:

A) $4X + 8Y + 6Z + 2W = 860$

B) $3X + 3Y + 1Z + 10W = 860$

C) $6X + 5Y + 5Z + 4W = 870$

D) $2X + 2Y + 3Z + 8W = 770.$

E) $X = \frac{860 - 8Y - 6Z - 2W}{4}$

$= 215 - 2Y - 1\frac{1}{2}Z - \frac{1}{2}W.$

F)

F) $3.(215 - 2Y - 1\frac{1}{2}Z - \frac{1}{2}W) + 3Y + 1Z + 10W = 860$

oder $645 - 6Y - 4\frac{1}{2}Z - 1\frac{1}{2}W + 3Y + 1Z + 10W = 860$

oder $-3Y - 3\frac{1}{2}Z + 8\frac{1}{2}W = 215.$

G) $6.(215 - 2Y - 1\frac{1}{2}Z - \frac{1}{2}W) + 5Y + 5Z + 4W = 870$

oder $1290 - 12Y - 9Z - 3W + 5Y + 5Z + 4W = 870$

oder $420 - 7Y - 4Z + 1W = 0$

oder $420 = 7Y + 4Z - 1W.$

H) $2.(215 - 2Y - 1\frac{1}{2}Z - \frac{1}{2}W) + 2Y + 3Z + 8W = 770$

oder $430 - 4Y - 3Z - 1W + 2Y + 3Z + 8W = 770$

oder $-2Y + 7W = 340.$

I) Weil $-3Y - 3\frac{1}{2}Z + 8\frac{1}{2}W = 215.$

oder $-6Y - 7Z + 17W = 430$

oder $17W - 7Z - 430 = 6Y$

so ist $Y = \frac{17W - 7Z - 430}{6}$

K) $420 = 7.\frac{(17W - 7Z - 430)}{6} + 4Z - 1W$

oder $420 = \frac{119W - 49Z - 3010}{6} + 4Z - 1W$

oder $2520 = 119W - 49Z - 3010 + 24Z - 6W$

oder $5530 = 113W - 25Z.$

L) $-2 \cdot \left(\frac{17 W - 7 Z - 430}{6}\right) + 7 W = 340$

oder $-\left(\frac{17 W - 7 Z - 430}{3}\right) + 7 W = 340$

oder $-17 W + 7 Z + 430 + 21 W = 1020$

oder $+4 W + 7 Z = 590.$

M) Weil $5530 = 113 W - 25 Z$:

oder $25 Z = 113 W - 5530$

so ist $Z = \frac{113 W - 5530}{25}$

N) $+4 W + 7 \cdot \left(\frac{113 W - 5530}{25}\right) = 590$

oder $+100 W + 791 W - 38710 = 14750$

oder $891 W = 53460.$

O) $W = 53460 : 891 = 60.$

P) Weil $Z = \frac{113 W - 5530}{25}$

so ist $Z = \frac{(113 \cdot 60) - 5530}{25} = 50$

Q) Weil $Y = \frac{17 W - 7 Z - 430}{6}$

so ist $Y = \frac{(17 \cdot 60) - (7 \cdot 50) - 430}{6} = 40.$

R)

R) Weil $X = 215 - 2Y - 1\frac{1}{2}Z - \frac{1}{2}W$
oder $= 215 - (2.40) - (1\frac{1}{2}.50) - (\frac{1}{2}.60.)$
so ist $X = (215 - 80 - 75 - 30) = 30.$

Eben so behandelt man 5 Fundamentalgleichungen, oder mehr als 4, wenn 5 oder mehr als 4 unbekannte Zahlen gesucht werden. Die Formel dieses Verfahrens zeigt deutlich, daß aus so vielen Gleichungen, als man Zahlen sucht, diese Zahlen auch gefunden werden können. Mehr, als so viele Gleichungen, würden also überflüssig seyn. Aber weniger, als so viel, wären auch nicht zureichend. Denn z. E. es sey die unbekannte Zahl W mit andern X, Y, Z, in allen Fundamentalgleichungen verwickelt: so kann sie nicht eher entdeckt werden, als bis man eine Gleichung bekömmt, worinnen ausser W lauter bekannte Grössen, aber weder X, noch Y, noch Z sind.

Nun kann man aus zwey Gleichungen, worinnen eine gewisse Zahl N ist, nur eine Gleichung bekommen, worinnen N nicht ist. Wenn nun X, Y, Z, weggeschafft werden sollen: so braucht man zwey Fundamentalgleichungen, A und B, wegen X, um eine Gleichung M zu finden, worinnen X nicht ist. Zu M muß man C, eine Fundamentalgleichung, zu Hülfe nehmen, wegen Y, um N zu finden, worinnen auch Y nicht ist. Nebst N wird noch eine Fundamentalgleichung D erfodert, um O zu finden, worinnen auch Z nicht ist. In dieser Gleichung O ist alsdann lauter Bekanntes,

und W, wenn W nebst X, Y, Z, die vier unbekannten Zahlen wären. Nun erst wird W bekannt. Es wird also nicht einmal eine einzige der unbekannten Zahlen, die in Gleichungen mit andern unbekannten verwickelt sind, gefunden, wenn nicht so viel Fundamentalgleichungen, als unbekannte Zahlen sind, gebraucht werden.

Die Methode, welche in den Formeln stehet, ist allgemein. Bey gewissen Beschaffenheiten der Fundamentalgleichungen aber kann man sich die Arbeit erleichtern, wenn man zwey derselben durch Addition, Subtraction, Multiplication oder Division vereinigt. Doch davon weiter unten. Die Uebung lehrt mancherley Erleichterungen.

Wenn die Gleichungen, welche man für unabhänglich von einander, oder für fundamental hält, es nicht sind, sondern aus einander folgen: so ist die ganze Entdeckung zuletzt diese, daß W sey W, daß Nulle sey Nulle, oder so etwas. Es mögen die Gleichungen seyn $X + Y = 12$, und $X = 12 - Y$; so folgt $12 - Y + Y = 12$, das ist, $12 = 12$. So geht es uns zuweilen in Fällen, wo die Unabhänglichkeit der Gleichungen schwer zu beurtheilen ist.

Wenn wir von einer Anzahl mit einander verwickelter unbekannter Grössen, X, Y, Z und W, zuerst oder vorzüglich W wissen wollen; so müssen wir nicht W, sondern nach einander X, Y, Z

aus

aus den Gleichungen zuerst wegschaffen, wie in dem Exempel nach der Formel geschehen ist.

§. 69.

Die allgemeinen Beschaffenheiten gewisser Arten von Zahlen zu untersuchen, ist einer der Hauptzwecke der Algebra, (§. 51.) Nennet eine jede **gerade Zahl** Z, und eine jede ungerade Z + 1; und gebraucht die 4 algebraischen Rechnungsarten: so werdet ihr mit Allgemeinheit und auf die leichteste Art Folgendes sehen, oder Andern zeigen. 1) **Die Summe** von lauter geraden Zahlen ist gerade; die Summe von lauter ungeraden Zahlen, wenn die Anzahl der summirten Theile gerade ist, ist auch gerade; wenn die Anzahl der summirten ungeraden Zahlen aber ungerade ist; so ist die Summe ungerade. Wird also eine Mischung von geraden und ungeraden Zahlen summirt; so ist, wenn ungerade Theile in gerader Anzahl da sind, die Summe gerade; ungerade aber, wenn die ungeraden Theile in ungerader Anzahl da sind. 2) **Der Unterschied** zweyer geraden oder zweyer ungeraden Zahlen ist gerade; hingegen der Unterschied einer geraden und ungeraden Zahl ist ungerade. 3) Wenn unter vielen Factoren auch nur einer gerade ist; so ist **das Product** eine Summe gerader Zahlen, folglich gerade; ist aber keiner der Factoren gerade; so muß das Product ungerade seyn. Denn zwey (folglich auch drey, vier, fünf und mehr,) ungerade Factoren geben ein ungerades Product, indem der eine ungerade

Factor, durch den andern ungeraden ($Z+1$) multiplicirt, einmal mehr gesetzt wird, als wenn der andre Factor gerade wäre, und weil durch diese Setzung zu einer geraden Summe, (siehe den ersten Punkt) eine ungerade Zahl addirt wird. 4) Der angemeßne Quotient zweyer ungeraden Zahlen ist ungerade; zweyer geraden Zahlen aber kann gerade oder ungerade seyn: ist das Dividend gerade, der Divisor ungerade; so muß der Quotient gerade seyn: ist das Dividend ungerade, der Divisor aber gerade; so sind sie einander nicht angemessen. Alles dieses erhellet aus der Multiplication.

§. 70.

Von zweyen Zahlen, (g der grössern, k der kleinern) ist die grössere die halbe Summe und halbe Differenz; die kleinere aber die halbe Summe weniger der halben Differenz. Denn nennt die Differenz d, die Summe s.

So ist $g = s - (k = g - d)$

$$g = s - (g - d)$$
$$g = s - g + d$$
$$2g = s + d$$
$$g = (s + d) : 2$$

Und $k = s - (g = k + d)$

$$k = s - (k + d)$$
$$k = s - k - d$$
$$2k = s - d$$
$$k = (s - d) : 2$$

Und

Und eben daher ist die Summe:

$s = (2g - d)$ oder $(2k + d)$

Denn $2g = s + d$ Und $2k = s - d$

Also $2g - d = s$ Also $2k + d = s$

Das Product der Summe und Differenz zweyer Zahlen, ist die Differenz der Quadrate derselben Zahlen:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 - ba \\ - b^2 + ba \\ \hline a^2 - b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 + 3 \\ 8 - 3 \\ \hline 8^2 - 3.8 \\ - 3^2 + 3.8 \\ \hline 8^2 - 3^2 = 55. \end{array}$$

Das Quadrat der Summe und der Differenz zweyer Zahlen, sind um 4 Producte derselben verschieden:

$$\begin{array}{l} a + b \text{ Summe.} \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ + b^2 + ab \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \text{ Quad.} \\ a^2 - 2ab + b^2 \\ \hline \quad 4ab \text{ Unterschied.} \end{array} \qquad \begin{array}{l} a - b \text{ Differenz.} \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \\ + b^2 - ab \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \text{ Quadrat.} \end{array}$$

Also ist die Summe des Quadrats von der Summe, und des Quadrats von der Diffe-

Differenz zweyer Zahlen, die Summe des doppelten Quadrats von der ersten Zahl und von der andern Zahl. Denn

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 \end{array}\right\} \text{addirt}$$
$$\overline{2a^2 + 2b^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} (8+3)^2 = 11^2 = 121 \\ (8-3)^2 = 5 \;\;= \;\;25 \end{array}\right\} \text{addirt}$$

$$8^2 + 2.8.3 + 3^2 = 121$$
$$+ 8^2 - 2.8.3 + 3^2 = 25$$
$$\text{Also} = 121 + 25 = 11^2 + 5^2.$$

Und das Product zweyer Zahlen ist das Viertheil des Unterschiedes, den das Quadrat ihrer Summe und ihrer Differenz giebt. Denn

weil $4ab$, das ist $4p = (a+b)^2 - (a-b)^2$

weil $4.(8.3) = (8+3)^2 - (8-3)^2$

oder weil $4p = s^2 - d^2$

weil $4.(8.3) = (11)^2 - 5^2$

so ist $p = (s^2 - d^2) : 4$

$(8.3) = 11^2 - 5^2 : 4 = 24.$

Es ist aber (§. 56.) das Viertheil des Quadrats einer Zahl dem Quadrate ihrer Hälfte gleich, weil $(a:2)^2 = a^2 : 2^2 = a^2 : 4$. Also ist das Product zweyer Zahlen auch das Vierthal des Unterschiedes, den das Quadrat der Hälfte von ihrer Summe, und das Quadrat der Hälfte von ihrer Differenz, giebt.

§. 71.

§. 71.

Gesetzt, man sagt euch die beyden ersten Sätze:

$$\frac{1}{2} X + Y = 54$$
$$2 X - Y = 96$$
$$2\frac{1}{2} X = 150$$
$$X = (150 : 2\tfrac{1}{2}) = 50.$$

so ist der dritte Satz die Summe der beyden ersten und der beyden andern Glieder, weil $+ Y - Y$ sich aufhebt; und der vierte Satz ist eine Folgerung des dritten, wodurch euch X als 50 bekannt, folglich die Gleichung erklärt oder aufgelöset wird. Also werden zuweilen durch Addition 2 Gleichungen zweckmäßig vereinigt.

Aber auch durch Subtraction. Gesetzt, man sagte euch, zwey Zahlen, X und Y, wären so beschaffen, daß wenn man die Summe derselben zu dem Producte addirte, m, oder 44 käme; und daß, wenn man die Differenz zu dem Producte addirte, n, oder 36 käme.

$(x+y)+xy=m$	$(x+y)+xy=44$
$(x-y)+xy=n$	$x-y+xy=36$
$2y=m-n$ Rest.	$2y=8$ Rest.
Also $y=(m-n):2$	Also $y=4$

Also setzet für die gegebne Gleichung $x+y+xy=44$

diese $x+4+4x=44$

oder $5x=44-4$

$$x=(40:5)=8$$

Zu-

Zuweilen geht dieses auch an durch Multiplikation der einen Gleichung durch die andre. Die Gleichungen mögen seyn:

$xy = cb$	$xy = 5 \cdot 40$
$c(b-d) = x(f-y)$	$5 \cdot (40-8) = x(18-y)$
$(xc)y(b-d) = xc(b(f-y))$	$(5x)32y = 5x(40 \cdot 18-y)$
$y(b-d) = bf - by$	$32y = 720 - 40y$
$y(b-d) + by = bf$	$32y + 40y = 720$
$y(2b-d) = bf$	$72y = 720$
$y = bf : 2b - d$	$y = (720 : 72) = 10$

Also für $(xy = 5 \cdot 40)$
setzt $(10y = 200)$
Folglich $x = 200 : 10 = 20$

Auch durch Division der Gleichungen durcheinander wird zuweilen einer der unbekannten Buchstaben ausgestossen. Z. E.

$$8x = 60 - 2y$$
$$2x = 20 - y$$

$$4 = \frac{60 - 2y}{20 - y}$$

$$20 \cdot 4 - 4y = 60 - 2y$$

$$80 - 2y = 60$$

$$80 - 60 = 2y$$

$$y = 20 : 2 = 10$$

Also für $8x = 60 - 2y$

setzet $8x = (60 - 20)$

$$x = 5$$

Ihr

Ihr dürft auch eine der gegebnen Gleichungen vorher durch eine beliebige Zahl multipliciren oder dividiren, damit sie geschickt werde, sie zu der andern so zu addiren, oder so davon zu subtrahiren, oder (wenn die andre Gleichung davon subtrahirt wird) einen solchen Rest zu geben, daß einer der unbekannten Buchstaben wegfalle. Denn Gleichung bleibt immer, wenn ihr beyde Glieder einer Gleichung durch die 4 Rechnungsarten gleichförmig behandelt. Es sey die Gleichung

	$6x - 4y = 36$	oder	$6.(8) - 4.(3) = 36$
addirt	$2x \qquad 2x$		$2.(8) \qquad 2.(8)$
so kömmt	$8x - 4y = 2x + 36$		$8.(8) - 4.(3) = 36 + 2.(8)$
subtrah.	$2x \qquad 2x$		$2.(8) \qquad 2.(8)$
so kömmt	$6x - 4y = 36$		$6.(8) - 4.(3) = 36$
mult.d.4	$4 \qquad 4 \qquad 4$		$4 \qquad 4 \qquad 4$
	$24x - 16y = 144$		$24.(8) - 16.(3) = 144$
divid.d.8	$8 \qquad 8 \qquad 8$		$8 \qquad 8 \qquad 8$
	$3x - 2y = 18$		$3.(8) - 2.(3) = 18$

Also bleibt auch Gleichung oder Gleichheit, wenn man beyde Glieder zu einerley Potenz erhebt, oder ihre gleichbenamte Wurzel an ihrer Statt setzt. Es sey die Gleichung (in

welcher

welcher die Buchstaben römische Zahlen bedeuten) folgende:

$$V = 5$$

Also $V \cdot V = 5 \cdot 5$

oder - - $V^2 = 5^2$

oder - - $V^2 = 25$

also - - $V^2 \cdot V^2 = 25 \cdot 25$

oder - - $V^2 \cdot V^2 = 5^2 \cdot 5^2$

oder - - $V^4 = 5^4$

also - - $\sqrt[2]{V^4} = \sqrt[2]{5^4}$

oder - - $V^2 = 5^2$

also - $\sqrt[2]{V^2} = \sqrt[2]{5^2}$

also - - $V = 5$

also - - $V + 4 = 9$

also - $\sqrt[2]{V + 4} = \sqrt[2]{9}$

also - - $\sqrt[2]{V + 4} = 3$

also - - $V + 4 = 3^2 = 9$

oder - - $IX = 9$.

§. 72.

Für Ungeübte ist es zuweilen schwer, die Factoren, wodurch einerley Zahl Y, in einer Gleichung multiplicirt ist, zu finden und zusammen zu setzen, oder zu trennen, wie es der Zweck erfodert, wenn man entweder die Gleichheit gleicher Dinge einsehen, oder kurz schreiben, oder unbekannter Zahlen los werden will. Z. E. wenn ihr wüßtet,

a wäre

a wäre eine bekannte oder erforschbare Zahl, und ihr wolltet y aus folgender Gleichung finden:

$$2y + \frac{ay}{2} + ya - 3y = y \times \tfrac{1}{2}a + 50.$$

so bedenkt, daß $\frac{ay}{2} = y \times \frac{1}{2}a$; und daß $ay - y = (a - 1)y$. Alsdann setzet

anstatt $2y + \frac{ay}{2} + ya - 3y = y \times \frac{1}{2}a + 50$

dieses: $2y + ya - 3y = 50$

oder $ya - y = 50$

oder $(a - 1)y = 50$

oder $y = 50 : (a - 1)$

Wenn nun a etwa 26 wäre; so würde euch y als 50:25, das ist, als 2, bekannt.

Kommen in der Gleichung Brüche vor, welche die nöthige Veränderung der Gleichung beschwerlich machen: so bringe man sie zu einem Nenner, und multiplicire die ganze Gleichung durch den Generalnenner aller. Z. E. wenn $X = 4$ und $Y = 3$; so ist folgende Gleichung wahr:

$\frac{3}{4}X + \frac{5}{6}Y = 5\frac{1}{2}$. Aber es ist auch

$\frac{9}{12}X + \frac{10}{12}Y = 5\frac{1}{2}$. Und

$9X + 10Y = 12 . 5\frac{1}{2} = 66.$

Aber, weil man in gewissen Umständen aus Ursachen, die zu rechter Zeit gesagt werden sollen, die höchste Potenz der unbekannten Zahl gern frey hat von Coefficienten, das ist, von bekannten Factoren, die damit multipliciret sind: so macht man auch wohl Brüche in derjenigen Glei-

chung

chung, wo keine waren. Z. E. wenn $X = 10$: so ist folgende Gleichung wahr, in welcher X, als die höchste Potenz, den Coefficienten 3 hat:

$$3X^2 - 7X = 239.$$

Also $3X^2 : 3 - 7X : 3 = 230 : 3.$

Oder $X^2 - \frac{7}{3}X = 76\frac{2}{3}.$

§. 73.

Ueberhaupt merke man hier den Unterschied **hoher und niedriger, reiner und unreiner Gleichungen.** Die niedrigste Art der Gleichungen ist, welche die unbekannte Grösse nur in der ersten oder niedrigsten Potenz enthält, als $4\frac{1}{2}\,y = 9$, (wo y offenbar 2 ist.) Alle andern Arten der Gleichungen, als $y^2 + 4y = 96$, (wo $y = 8$) oder $y^3 = 27$, wo ($y = 3$) oder $y^3 + 3y^2 = 54$ (wo y abermals $= 3$) ist, heissen höher; und zwar rein, wenn nicht höhere und niedrigere Potenzen derselben Zahl beysammen stehen; sondern nur eine einzige Potenz derselben da ist; als $3X^2 = 300$, (wo $X = 10$) oder $5Y^3 = 40$, (wo $Y = 2$.) Unrein aber heissen die Gleichungen, wenn höhere und niedrigere Potenzen derselben Zahl beysammen stehn, als $2X^2 - 4X = 240$, (wo $X = 12$). Uebrigens sind quadratische Gleichungen, worinnen das Quadrat; cubische, wo die cubische Potenz die höchste Potenz der unbekannten Zahl ist, als $4X^2 - 2X$; oder $X^3 - 12X^2$. So hat man auch biquadratische Gleichungen, als $5y^4 - \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$, (wo $y = 1$); und noch

höhere

höhere, als $= y^6 = 64$, (wo $y = 2$) u. s. w. **Vollständig** heissen die Gleichungen, wenn von der höchsten Potenz bis zur niedrigsten keine Potenz fehlt, als $y^4 + 3y^3 - 2y^2 + 6y = 44$, (wo $y = 2$); **unvollständig**, wenn die Reihe nicht voll ist, als $y^3 + 6y = 45$ (wo $y = 3$.) Subtrahirt man von beyden Gliedern der Gleichung das ganze andre Glied: so hat man eine **nullirte Gleichung**, die man aus einer jeden machen kann. Z. E.

$$X^2 + \tfrac{1}{2} X = 68 \text{ (wo } X = 8)$$
subt. $\quad 68 \qquad 68$
$$X^2 + \tfrac{1}{2} X - 68 = 0$$

Ich nenne eine Gleichung **wohlgeordnet**, wenn sie durch die nöthige Veränderung dahin gebracht ist, daß die höhern und niedrigern Potenzen auf einander folgen, und keine Potenz zweymal steht, und die höchste Potenz keinen Coefficienten, (oder bekannten Factor) auch nicht das Minuszeichen, sondern das Pluszeichen hat, und daß folglich alle Potenzen der unbekannten Grösse auf dieselbe Seite gebracht sind; übrigens mag die Gleichung nullirt seyn oder nicht. Es soll geordnet werden folgende Gleichung (wo $y = 10$)

$$2X^2 - 17X + 6X = 20X^2 - 2X^3 + 90$$
$$2X^3 + 2X^2 - 11X = 20X^2 + 90$$
$$2X^3 + 2X^2 - 20X^2 - 11X = 90$$
$$2X^3 - 18X^2 - 11X = 90 \text{ oder}$$
$$2X^3 - 18X^2 - 11X - 90 = 0.$$

§. 74.

Eine Wurzel der Gleichung ist, was, ohne Nachtheil der Wahrheit, der Buchstab, welcher die unbekannte Grösse anzeigt, bedeuten kann. In den niedrigsten Gleichungen ist nur eine Wurzel; sie muß 10 seyn in der Gleichung $2X = 20$. Aber wie die Multiplication zeigt, hat die Quadratische Gleichung 2 Wurzeln; z. E. $X^2 = 9$. Hier kann X seyn entweder $+3$ oder -3. Und in der Gleichung $X^2 - 2X = 80$, kann die Wurzel seyn $+10$ oder -8. In der Gleichung $3X^2 + 9X = 30$, kann sie seyn $+2$ oder -5. Eben so ist es mit höhern Gleichungen, (§. 62. No. 6.) daß mehr Wurzeln derselben erfindlich sind.

Es giebt negativ gesetzte Quadrate, als $10 - X^2 = 6$, wo $X = 2$; auch giebt es negativ gesetzte Quadratwurzeln, als $10 - \sqrt{y} = 7$, wo $y = 9$. Aber es giebt keine Wurzeln oder Zahlen, welche, erhöht zu ihrer Quadratzahl, negativ bleiben, oder negativ werden. Denn $(+\sqrt[2]{a})^2 = +a$; und $(-\sqrt[2]{a})^2 = +a$. Nun steht das, was eine Wurzel würde, (wenn man sie zu einer Potenz erhöhte) hinter dem Wurzelzeichen. Also sind $\sqrt[2]{-a}$, oder $\sqrt[2]{-4}$, (und andre von solcher Art) Zeichen unmöglicher Zahlen. Daher kann man aus $-y$, oder aus $-y^2$, keine Quadratwurzel haben. Denn sie müßte werden $\sqrt[2]{-y}$, oder $\sqrt[2]{-y^2}$, oder eine unmögliche Zahl. Also sind auch unmöglich

$\sqrt[4]{-y}$,

$\sqrt[4]{-y}$, $\sqrt[6]{-y}$, $\sqrt[8]{-y}$, u. s. w. denn alle diese enthalten das Zeichen $\sqrt[2]{-y}$, weil z. E. $(\sqrt[4]{-y})^2 = \sqrt[2]{-y}$ seyn würde. Solche Zeichen unmöglicher Grössen kommen hervor, wenn man unbekannte Zahlen von solcher Beschaffenheit, davon es keine geben kann, vermuthet, und seine Vermuthung in Gleichungen ausdrückt. Z. E. die Zahl 12 kann in keine 2 solche Theile, Y und Z, zerfällt werden, deren Product 40 giebt, weil sie zu klein dazu ist. Wer das aber nicht weiß, setzt die Gleichungen A und B, und schließt weiter:

A - - $x + y = 12$ B - - $xy = 40$.

$x = 12 - y$ $\quad (12 - y)y = 40$

$12y - y^2 = 40$ (siehe A)

$-y^2 = 40 - 12y$

$-40 - y^2 = -12y$

$-40 = y^2 - 12y$.

$36 - 40 = y^2 - 12y + 36$

$36 - 40 = (y - 6)^2$

$-4 = (y - 6)^2$

$\sqrt{-4} = y - 6$

$\sqrt{-4} + 6 = y$.

Das ist, er folgert, daß ein solcher Theil von 12, dessen Product, durch den andern Theil, 40 machen soll, die Zahl 6 nebst einer unmöglichen Zahl, nämlich nebst $\sqrt{-4}$, folglich selbst eine unmögliche Zahl oder Summe seyn soll.

§. 75.

Eine unreine geordnete quadratische Gleichung (§. 62. No. 6.) aufzulösen, addirt man zu beyden Gliedern das $\frac{1}{4}$ des Quadrats von dem bekannten Coefficienten der unbekannten Zahl. Es mögen z. E. 2 Zahlen, y und x gesucht werden, deren Summe s oder 20, deren Product p oder 96 ist.

	$x + y = s$	$x + y = 20$
	$x\,y = p$	$x\,y = 96$
Also	$x = s - y$	$x = 20 - y$
Und	$x = p : y$	$x = 96 : y$
	$s - y = p : y$	$20 - y = 96 : y$
	$sy - y^2 = p$	$20y - y^2 = 96$
	$sy - p = y^2$	$20y - 96 = y^2$
	$-p = y^2 - sy$	$-96 = y^2 - 20y.$

Nun folgt die Anwendung der Regel, welche allgemein ist, und aus der Multiplication y + a y durch sich selbst, oder der Grösse y — a y durch sich selbst, bewiesen wird.

$\frac{s^2}{4} - p = y^2 - sy + \frac{s^2}{4}$	$\frac{(20)^2}{4} - 96 = y^2 - 20 + \frac{20^2}{4}$
$\frac{s^2}{4} - p = (y - \frac{1}{2}s)(y - \frac{1}{2}s)$	$\frac{(20)^2}{4} - 96 = (y - \frac{20}{2})(y - \frac{20}{2})$
$\frac{s^2}{4} - p = (y - \frac{1}{2}s)^2$	$\frac{(20)^2}{4} - 96 = (y - \frac{20}{2})^2$
$\sqrt{(s^2:4) - p} = y - \frac{1}{2}s$	$\sqrt{(20)^2:4 - 96} = y - (20:2)$
$\sqrt{(s^2:4) - p} + \frac{1}{2}s = y$	$\sqrt{(20)^2:4 - 96} + 20:2 = y$
	$\sqrt{400:4 - 96} + 10 = y$
	$\sqrt{100 - 96} + 10 = y$
	$(2 + 10) = y = 12.$

Da nun $x = 20 - y$ (laut des Vorigen) so ist $x = 20 - 12 = 8.$

Alle

Alle unreine quadratische Gleichungen haben eine der folgenden Formen:

$$\left.\begin{array}{ll} & 5x^2+3x=26 \\ \text{nullirt} & 5x^2+3x-26=0 \\ \text{in Ordnung} & x^2+\frac{3}{5}x-\frac{26}{5}=0 \end{array}\right\} \text{wo } x=2 \text{ oder } -\frac{13}{5}$$

oder

$$\left.\begin{array}{ll} & 5x^2-3x=14 \\ \text{nullirt} & 5x^2-3x-14=0 \\ \text{in Ordnung} & x^2-\frac{3}{5}x-\frac{14}{5}=0 \end{array}\right\} \text{wo } x=2 \text{ od. } -\frac{7}{5}$$

oder

$$\left.\begin{array}{ll} & 3x^2+8x=-4 \\ \text{nullirt} & 3x^2+8x+4=0 \\ \text{in Ordnung} & x^2+\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}=0 \end{array}\right\} \text{wo } x=-2 \text{ od. } =-\frac{2}{3}$$

oder

$$\left.\begin{array}{ll} & 3x^2-8x=-4 \\ \text{nullirt} & 3x^2-8x+4=0 \\ \text{in Ordnung} & x^2-\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}=0 \end{array}\right\} \text{wo } x=2 \text{ oder } =\frac{2}{3}.$$

Alle solche in Ordnung gebrachte unreine quadratische Gleichungen kann man zwar auch auf mehr Arten, aber auch nach der obigen Formel auflösen. Z. E. die letzte:

$$x^2-\frac{8}{3}x=-\frac{4}{3}$$

$$x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}=-\frac{4}{3}+\frac{16}{9}$$

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2=-\frac{4}{3}+\frac{16}{9} \text{ (wie die Multiplicat. zeigt)}$$

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

$$x-\frac{4}{3}=\pm\sqrt{\frac{4}{9}}=\pm\frac{2}{3}$$

$$x=\pm\frac{2}{3}+\frac{4}{3}$$

$x =$ entweder $\frac{6}{3}$ (das ist 2) oder $\frac{2}{3}$.

Wenn die Wurzel einer Gleichung $x^2 + x = 12$ oder $x^2 - x = 6$, (welches man eine Pronikwurzel nennt) gesucht wird, verfährt man auf dieselbe Art. Z. E.

$$x^2 - x = 6$$
$$x^2 - x + \tfrac{1}{4} = 6\tfrac{1}{4}$$
$$(x - \tfrac{1}{2})^2 = 6\tfrac{1}{4} = \tfrac{25}{4}$$
$$\sqrt{(x - \tfrac{1}{2})} = \pm\sqrt{\tfrac{25}{4}} = \pm\tfrac{5}{2}$$
$$x = \pm\tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2}$$
$x =$ entweder 3 oder -2.

Man wird in diesen und andern Exempeln keine Schwierigkeit finden, wenn man nur bedenkt, daß $-a$ multiplicirt durch $-b$ sey $+ab$. Also ist in dem letzten Exempel (wenn $x = -2$ ist) $x^2 - x = (-x)^2 - (1 \times -x) = 4 + 2 = 6$.

Wenn in einer Gleichung **verschiedene Potenzen oder Wurzeln derselben Grösse** (nämlich mit verschiedenen Coefficienten) **einander als gleich gesetzt werden**: so ist die Auflösung oder die Zubereitung zu derselben zuweilen leicht. Z. E. $2x^2 = 8x$. Also $x^2 = 4x$. Also $x = 4$. Oder $4x^3 = 12x^2$. Also $x = 3x^2$. Also $x = 3$. So auch $5y^2 = 40\sqrt{y}$. Also $y^2 = 8\sqrt{y}$. Also $y^2 : \sqrt{y} = 8$. Also $\sqrt[2]{y}\sqrt[2]{y}\sqrt[2]{y}\sqrt[2]{y} : \sqrt{y} = 8$. Also $\sqrt[2]{y}\sqrt[2]{y}\sqrt[2]{y} = 8$. Also $(\sqrt[2]{y})^3 = 8$. Also $\sqrt[2]{y} = \sqrt[3]{8}$.

Oder

Oder $\sqrt[2]{y} = 2$, oder $y = 4$. So auch bey der Gleichung $4x^3 + 5x^2 = 450x$. Also $4x^2 + 5x = 450$. Nun ist es eine quadratische Gleichung, aus welcher folgt, daß x entweder 10 oder $11\frac{1}{4}$ sey.

§. 76.

Es ist zur Auflösung einer Gleichung, oder zur Entdeckung ihrer unbekannten Grösse, zuweilen zuträglich, **die unbekannte Grösse mit einer andern zu verwechseln**, welche eine Summe, oder ein Rest, oder ein Product, oder ein Quotient der vorigen ist. Wenn für y gewählt wird $y + a = z$, so heißt das, die Wurzel der Gleichung **vermehren** oder **vergrössern**; hingegen **vermindern**, wenn für y gewählt wird $y - a = x$. Die Aufgabe sey: $y + 3$ sey die Hälfte von $x + 4$, und das Product $(y + 3)(x + 4)$ sey 1250; so benennt $y + 3$ durch w, $x + 4$ durch z, und sucht erst w oder z.

$$w = z : 2$$

$wz = 1250$, folglich $w = 1250 : z$

folglich $z : 2 = 1250 : z$

$$z = 2500 : z$$

$$z^2 = 2500 = 50 . 50 = (50.)^2$$

$\sqrt{z^2}$ oder $z = (\sqrt{50})^2$ oder 50

nun $z = x + 4 = 50$

$$x = 46.$$

Da nun $y + 3 = (x + 4) : 2$

so ist $y + 3 = 50 : 2 = 25$

folglich $y = 22.$

Der Geübte macht es kürzer. Z. E.

$$\left(\frac{x+4}{2}\right)(x+4) = 1250$$
$$(x+4)^2 : 2 = 1250$$
$$(x+4)^2 = 2500$$
$$(x+4) = \sqrt{2500}$$
$$x + 4 = 50$$
$$x = 46 \text{ u. s. w.}$$

So auch, wenn $(x+1)^2$ euch als $\frac{1}{3}$ von $y-1$, und $y-1$ als das Neunfache $x+1$ bekannt wird; so benennt $(x+1)$ durch w. Also

$w^2 = (y-1):3$. Also $w = \sqrt{(y-1):3}$
Und $y-1 = 9w$. Also $w = (y-1):9$.

Nach Division der untern Gleichung durch die obere.

$$1 = \frac{(y-1):9}{\sqrt{y-1}:\sqrt{3}}$$
$$1 = \frac{y-1:(3.3)}{\sqrt{y-1}:\sqrt{3}}$$
$$1 = \sqrt{y-1} : 3\sqrt{3}$$
$$3 = \sqrt{y-1} : \sqrt{3}$$
$$3^2 \text{ oder } 9 = (y-1):3$$
$$(3 \text{ mal } 9) \text{ oder } 27 = y-1$$
$$28 = y.$$

Nun ist $x+1 = y-1:9 = 27:9 = 3$.
Also $x = (3-1) = 2$.

Der

Der nächst höchsten Potenz von der unbekannten Grösse (§. 73.) in einer unreinen Gleichung wird man los, wenn man anstatt der unbekannten Grösse eine grössere oder kleinere wählt; nämlich eine grössere, wenn die gesagte Potenz positiv gesetzt war; eine kleinere, wenn sie negativ gesetzt war; aber der Zusatz oder der Abzug muß seyn (§. 72.) der bekannte Coefficient oder Factor, nachdem er erst dividirt ist, durch den um 1 vergrösserten Exponenten der gesagten Potenz. Das Folgende wird diese Regel erläutern. Z. E. Wenn die Gleichung ist $y^2 + 10\,y^1 = 24$; und wenn man des zweyten Theiles $10\,y^1$ los werden will: so ist 10 der Coefficient, und 1 der Exponent, welcher um 1 vergrössert, oder 2 werden muß. Also setze man $y + \frac{10}{2}$ oder $y + 5 = z$. So ist $y = z - 5$. Folglich wird die Gleichung $y^2 + 10\,y = 24$ verwandelt in

$$z^2 - 10\,z + 25 + 10\,z - 50 = 24$$

oder in $z^2 = 24 - 25 + 50 = 49 = 7^2$

Also $z = 7$. Folglich ($z - 5$ oder) $y = 2$.

Durch dieses Mittel werden also oftmals unreine Gleichungen rein, auch andre Vortheile erhalten. Z. E. die Gleichung $y^2 + 6\,y = 40$, wird (wenn $y = z - \frac{6}{2}$) verwandelt in $z^2 - 6\,z + 9 + 6\,z - \frac{36}{2} = 40$, oder in die Gleichung $z^2 = 49$. Folglich $z = 7$. Folglich ($z - 3$ oder) $y = 4$. Will man aber, vermittelst der Addition oder Subtraction der unbekannten Grösse, die nächst höchste

Potenz ersetzen, die etwa in der Reihe fehlt, wie in folgender Gleichung (worinnen $y = 2$) $y^3 + 4y = 16$; so darf man den Zusatz oder Abzug nach Belieben wählen. Z. E. Man setze, $y = z - 3$; so wird die Gleichung, wie die Multiplication zeigt,

$$z^3 - 9z^2 + 27z - 27 + 4z - 12 - 16 = 0$$

oder $z^3 - 9z^2 + 31z^1 - 55 = 0$.

§. 77.

Wenn (aus irgend einer Ursache) für die gegebene Gleichung A, worinnen x die unbekannte Grösse war, eine andre B gewählt wird, worinnen die unbekannte Grösse y seyn soll: so heißt diese Veränderung, wenn $x + a = y$ ist, die **Wurzel vergrössern**: wenn $x - a = y$ ist, die **Wurzel verkleinern**: wenn $xa = y$, die **Wurzel multipliciren**: wenn $x : a = y$, die **Wurzel dividiren**. Vom Addiren und Subtrahiren ist in dem vorhergehenden Paragraphen gehandelt. Wenn nun xa soll y seyn, das ist, wenn man die Wurzel multipliciren will: so ist $x = \frac{y}{a}$. Diesen gleichgültigen Ausdruck der unbekannten Grösse oder der Zahl x, setze man allenthalben für das x, (welches in der Gleichung A war) in der Gleichung B, worinnen y seyn soll; und zwar jedesmal setze man es in derselben Potenz, worinnen x in der Gleichung A war. Es sey $x = 3$. Und ax (oder $2x$) $= y$.

Es

Es sey A die erste Gleichung $x^3 + 2x^2 + 3x^1 - 54 = 0$

so ist B die zweyte $\frac{y^3}{2^3} + \frac{2y^2}{2^2} + \frac{3y^1}{2^1} - 54 = 0$

Diese Gleichung B hört nicht auf, Gleichung zu bleiben, wenn man alle Theile durch a^h, das ist, durch a, in der höchsten Potenz, die in der Gleichung ist, multiplicirt, (in unserm Falle ist $a^h = 2^3$). Also erhält man, aus der Gleichung B,

diese: $\frac{2^3 y^3}{2^3} + \frac{2^3(2y^2)}{2^2} + \frac{2^3(3y^1)}{2^1} - 2^3(54) = 0$

oder $(1)y^3 + 2^1(2y^2) + 2^2(3y^1) - 2^3(54) = 0$

oder allgemein

$$(y^h) + a^1(my^{h-1}) + a^2(ny^{h-2}) - a^3(b) = 0.$$

Das ist, wenn aus der ersten Gleichung eine andre gemacht wird, durch Verwandelung des x in y; so daß $xa = y$, oder daß die Wurzel durch a multiplicirt wird; alsdann setzt man y für x allenthalben; doch multiplicirt man die Theile vom ersten bis zum letzten durch 1, durch a^1, durch a^2, durch a^3, u. s. w. (das ist, durch eine geometrische Reihe der gewählten Zahl a, welche Reihe von 1 anfängt, und durch $a^1, a^2, a^3 \ldots$ fortgesetzt wird.)

Soll aber die Wurzel dividirt, das ist, für x ein ander y so gesetzt werden, daß $x:a = y$ ist; alsdenn setzt man y für x allenthalben in der gehörigen Potenz; man dividirt aber die ganze Reihe (nämlich die Theile nach der Ordnung) durch 1, a^1, a^2, $a^3 \ldots$ Z. E.

Die

Die Gleichung sey $x^3 + 2x^2 + 3x^1 - 54 = 0$
oder allgemein $x^h + m x^{h-1} + n x^{h-2} - b = 0$

Also wird, (wenn $a = 2$) $\frac{y^3}{1} + \frac{2y^2}{2^1} + \frac{3y^1}{2^2} - \frac{b}{2^3} = 0$

oder allgemein $\frac{y^h}{1} + \frac{my^{h-1}}{a^1} + \frac{ny^{h-2}}{a^2} - \frac{b}{a^3} = 0$

Der Beweis ist, wie zuvor. Nämlich $x : a = y$; so ist $x = y\,a$. Folglich darf man setzen

anstatt $x^h + m x^{h-1} + n x^{h-2} - b = 0$
dieses $a^h y^h + m a^{h-1} y^{h-1} + n a^{h-2} y^{h-2} - b = 0$

Diese letzte Gleichung darf man durchgängig dividiren durch a^h; so wird sie

$$\frac{a^h y^h}{a^h} + \frac{m a^{h-1} \cdot y^{h-1}}{a^h} + \frac{n a^{h-2} y^{h-2}}{a^h} - \frac{b}{a^h} = 0$$

oder $\frac{y^h}{1} + \frac{m y^{h-1}}{a^1} + \frac{n y^{h-2}}{a^2} \frac{-b}{a^h} = 0.$

Diese Regel dienet zuweilen, eine mit **Wurzelzeichen** beschwerte **Gleichung** in andre zu verwandeln, worinnen keine Wurzelzeichen sind. Denn man kann, zum Exempel, machen, daß $\sqrt[m]{n}$ oder $(\sqrt[m]{n})^1$ multiplicirt werde durch $(\sqrt[m]{n})^{m-1}$; wodurch das Product wird $(\sqrt[m]{n})^m$ oder n; (gleichwie $\sqrt[2]{n}\,\sqrt[2]{n}$ (oder $(\sqrt{n})^1$

$(\sqrt[2]{n})^1$ $(\sqrt[2]{n})^1$ oder $(\sqrt[2]{n})^2$ die Zahl n wird) oder daß $\sqrt[m]{n}$, dividirt durch $\sqrt[m]{n}$, in 1 verwandelt werde, und also wegfalle. Doch dieses im Vorbeygehen. Ich werde es künftig mehr erläutern.

§. 78.

Es kann sehr oft einerley Aufgabe auf verschiedene Weise aufgelöset werden. Z. E. Man soll aus der Summe und dem Producte zweyer Zahlen, das ist, aus $x + y = a$, und aus $xy = b$, die Zahlen x und y finden. Es sey x die grössere, y die kleinere Zahl, $a = 13$, $b = 40$:

Erste Auflösung,

$$(a - y)\, y = b$$

$$ay - y^2 = b$$

$$y^2 - ay = -b$$

$$y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = -b + \frac{a^2}{4} \quad (\S.\ 75.)$$

$$(y - \tfrac{1}{2}a)^2 = -b + \frac{a^2}{4}$$

$$(y - \tfrac{1}{2}a) = \pm\sqrt{-b + \frac{a^2}{4}}$$

$$y = \pm\sqrt{-b + \frac{a^2}{4}} + \tfrac{1}{2}a$$

$$y = \pm\sqrt{-40 + \frac{13^2}{4}} + \frac{13}{2}$$

$$y \text{ (weil sie die kleinere Zahl)} = -\tfrac{3}{2} + \tfrac{13}{2} = 5$$

$$x = 8.$$

Zweyte Auflösung. Es sey d die Differenz $x - y$. (§. 70.)

$$\frac{a+d}{2} \times \frac{a-d}{2} = b = \frac{a^2}{4} - \frac{d^2}{4}$$

$$\frac{d^2}{4} = \frac{a^2}{4} - b. \text{ Also } d^2 = a^2 - 4b;$$

und $d = \sqrt{a^2 - 4b}$

$$2y + d = a$$

$$2y + \sqrt{a^2 - 4b} = a$$

$$y = (a - \sqrt{a^2 - 4b}) : 2 = 5.$$

Dennoch haben beyde gleiche Wehrte von y, nämlich $\frac{a}{2} - \sqrt{-b + \frac{a^2}{4}}$ und $(a - \sqrt{a^2 - 4b}) : 2$ eine ganz verschiedene Gestalt, welche aber verschwindet, wenn man den ersten Werth so schreibt:

$$\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{-4b + a^2}{4}\right)} = \frac{a}{2} - \left(\sqrt{-4b + a^2}\right) : 2$$

$$= (a - \sqrt{-4b + a^2}) : 2.$$

Dritte Auflösung. $(a - y)y = b = ay - y^2$ Also $y^2 - ay = -b$. Es sey (§. 76.) $y - \frac{a}{2} = z$

oder $y = z + \frac{1}{2}a$.

Also $z^2 + az + \frac{a^2}{4} - az - \frac{a^2}{2} = -b$.

Daher $z^2 - \frac{a^2}{4} = -b$. Folglich $z^2 = -b + \frac{a^2}{4}$

Also $z\ (= y - \frac{1}{2}a) = \pm\sqrt{-b + \frac{a^2}{4}}$

Also $y = \frac{1}{2}a - \sqrt{-b + \frac{a^2}{4}} = 5$.

§. 79.

§. 79.

Eine jede Zahl oder Grösse, welche ohne Wurzelzeichen verständlich ausgedrückt werden kann, heißt rational. Z.E. 2, $2\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. Kann man sie aber nur verstehen (nämlich mit Genauigkeit) als eine Wurzel andrer Zahlen oder Grössen: so heißt sie irrational; als $\sqrt[2]{2}$, $\sqrt[3]{4}$. Denn $\sqrt[2]{2}$ ist mehr als 1; also 1 und ein Bruch, welcher aber (wie weiter unten gezeigt werden soll) nicht genau gefunden werden kann. Nach diesem Begriffe ist $\sqrt[2]{4}$ und $\sqrt[3]{27}$ rational, weil jenes 2 und dieses 3 ist, und nur zufällig durch ein Wurzelzeichen geschrieben wird. Man ist aber in der Algebra gewohnt, alle durch Hülfe eines Wurzelzeichens geschriebene Grössen oder Zahlen (so lange sie so geschrieben sind) irrational zu nennen.

§. 80.

Wenn man aus einem bekannten Producte b, und aus bekannten Factoren a, (ausser einem x, welcher unbekannt ist) das x suchen soll; und wenn man für x eine beliebige Zahl y annimmt, um durch a ein Product c daraus zu machen; so kann man y als f x und c als f b ansehen. Denn eine jede Veränderung einer Zahl kann man sich vorstellen, als wenn sie durch einen Factor oder Divisor, der f heissen mag, geschehen wäre; also $y = fx$. Da nun $xa = b$, und $ya = c$, und $y = fx$: so ist $c = fxa = fb$.

Ferner

Ferner da $c = fb$; so ist $f = \frac{c}{b}$

Da $y = fx$; so ist $x = \frac{y}{f} = \frac{y}{c:b} = \frac{yb}{c}$.

Folglich kann man alsdann x finden, wenn man y, oder die angenommne Zahl, durch das wahre oder alte Product multiplicirt, und hernach durch das falsche oder neue Product dividirt. Z. E. Es sey x zu suchen aus $\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x = 7$. Man nehme für x ein beliebiges y, z. E. 10, und rechne; so ist $\frac{1}{4}y + \frac{1}{3}y = 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} = 5\frac{5}{6}$. Aber $(10 \times 7) : 5\frac{5}{6} = 12$, welches das wahre x ist. Nach dieser Regel, welche die **Falsi-Regel** heißt, verfahren mehrentheils ohne rechte Einsicht, diejenigen, welche keine Algebra wissen.

§. 81.

Es sey bekannt, daß jemand eine unbekannte Anzahl Y Ochsen à 20 Rthlr. und eine unbekannte Anzahl Z Pferde à 30 Rthlr. zusammen für 350 Rthlr. gekauft habe; und man verlangt Y und Z zu wissen, wobey voraus gesetzt wird, daß man lauter ganze Stücke (keine Theile) gekauft habe: so ist die Gleichung $20\,Y + 30\,Z = 350$; woraus nichts weiter zu folgen scheint, (weil bey 2 unbekannten Grössen nur eine Gleichung ist,) als daß $Y = \frac{350 - 30\,Z}{20}$, oder daß $Z = \frac{350 - 20\,Y}{30}$.

Hier wird also eine neue Art von Schlüssen erfodert, nämlich vom Kleinern und Grössern, daher ich die Zeichen ($>$ $<$) brauchen will, deren Spitze bey

dem

dem Kleinern, und deren Oeffnung bey dem Grössern stehe.

$$20\,y + 30\,z = 350$$
$$2\,y + 3\,z = 35$$
$$2\,y < 35$$
$$y < 17\tfrac{1}{2} \text{ oder } < 17.$$

Also, so lange wir keine Regeln wissen, diese Rechnung abzukürzen, müssen wir versuchen, welche Zahlen unter 17, durch den Ochsenpreis 20 multiplicirt, und hernach von 350 subtrahirt, einen solchen Rest geben, wofür Pferde à 30 Rthlr. gekauft werden können, das ist, welcher durch 30 aufgeht.

$$350 - 16.20 = 30 \quad y = 16 \quad z = 1$$
$$350 - 13.20 = 90 \quad y = 13 \quad z = 3$$
$$350 - 10.20 = 150 \quad y = 10 \quad z = 5$$
$$350 - 7.20 = 210 \quad y = 7 \quad z = 7$$
$$350 - 4.20 = 270 \quad y = 4 \quad z = 9$$
$$350 - 1.20 = 330 \quad y = 1 \quad z = 11.$$

So viele Bedeutungen von Y und Z sind nach der Aufgabe möglich. Wenn aber zugleich bestimmt ist, daß der Ochsen mehr, als der Pferde sind; so werden weniger mögliche Bedeutungen. Man nenne d den Unterschied $y - z$. Also sey $z = y - d$.

$$20\,y + 30\,z = 350$$
$$2\,y + 3\,z = 35$$
$$2\,y + 3\,y - 3\,d = 35$$
$$5\,y - 3\,d = 35$$
$$5\,y > 35 \text{ und } y > 7.$$

Alsdann bleiben nur möglich für y die Zahlen 10; 13, 16. Wäre zugleich bestimmt, y sey ungerade; so wäre für y die Zahl 13 bestimmt.

Nun heissen unbestimmende Aufgaben solche Materien zu Gleichungen, durch welche keine der unbekannten Zahlen bestimmt wird, sondern bey deren Wahrheit jedes Zeichen einer unbekannten Zahl mehr als eine Bedeutung haben kann. Bey dem letzten Umstande war also diese Aufgabe nicht mehr unbestimmend; aber man pflegt alle Aufgaben, die nicht bloß durch Gleichungen, ohne Hülfe anderer Kenntnisse von den Umständen, auflöslich sind, unbestimmend zu nennen. Lehrreicher wegen schwererer Exempel, und regelmässiger aber ist folgende Auflösung der vorigen Aufgabe.

$20\,y + 30\,z = 350$, oder $2\,y + 3\,z = 35$.

Also $y = \frac{35 - 3z}{2} = 17 + \frac{1 - 3z}{2} = 17 - r$.

Denn $\frac{1 - 3z}{2}$, welches ich $-r$ nenne, ist negativ, darum bezeichne ich es durch $-r$.

Also $1 - 3z = -2r$. Oder $3z - 1 = 2r$.

Folglich $z = (2r + 1) : 3$. Dieß bedeutet, (weil $2r$ eine gerade, folglich $2r + 1$ eine ungerade Zahl ist,) daß man für z den dritten Theil einer jeden durch 3 theilbaren, ungeraden Zahl nehmen könne, deren Product aus 30, die Summe 350, nicht übersteigt; also 1, 3, 5, 7, 9, 11. Denn 13.30 wäre schon 390.

Auch

Auch folgende Aufgabe ist bestimmend, ob gleich durch andre Schlüsse, als durch Gleichungen. Es sollen y und z zusammen 18; und y ein angemeßnes Product von 5, z aber von 4, folglich Totalzahlen seyn, deren erste durch 5, die andre durch 4 aufgeht oder theilbar ist. $y + z = 18$; also $y < 18$. $y:5 < 18:5$. Also $y:5 < 3+1$. Folglich $y < 20$. Da nun y eine Summe von Fünfzahlen (5 + 5 u. s. w.) ist; so muß es 15 oder 10 oder 5 seyn; doch 5 oder 15 kann es nicht seyn, weil $18 - 5$ oder $18 - 15$ nicht durch 4 aufgeht; also ist es 10. Denn $18 - 10 = 8$, geht durch 4 auf. Also ist $y = 10$, $z = 8$.

Eine zu schwerern Exempeln nützliche und regelmässigere Auflösung ist diese: $y = 5V$, $z = 4W$.

$5v + 4w = 18$. Also $v = (18 - 4w):5$,

oder $v = 3 + \frac{3 - 4w}{5} = 3 - r$.

Also $3 - 4w = -5r$, oder $4w - 3 = 5r$.

Oder $4w = 5r + 3$

$w = \frac{5r+3}{4} = r + \frac{r+3}{4} = r + s$

$r + 3 = 4s$. Also $r = 4s - 3$.

Daher $w = 5s - 3$. Und (4 w oder) $z = 20s - 12$. Doch so, daß das Resultat nicht über 18 steigt. Also ist $s = 1$; und w ist 2. Also $z = 8$. Und $y = 10$.

Aber unbestimmend ist folgende Aufgabe: Es wurden Y Ochsen à 21 Rthlr. und Z Pferde à 31 Rthlr., zusammen für

 1770

1770 Rthlr. gekauft. Und nach Y und Z wird gefragt. Wenn die Zahl 1770, durch 21, oder 31 aufgienge: so könnte entweder Y oder Z seyn Nulle, das ist, lauter Pferde oder lauter Ochsen gekauft seyn. Aber das ist hier nicht. Ferner ist zu merken das Product 21. 31. oder 651, welches ich p nennen will. Es ist die Summe 1770 = 2 p + 468, welches man durch Division findet. Für jedes p können sowohl Ochsen als Pferde gekauft seyn, der Ueberschuß aber, der über 2 p in 1770 ist, oder 468, ist eine Summe, für welche nothwendig eine bestimmte Anzahl Ochsen oder Pferde gekauft sind. Ein Ochs und ein Pferd zusammen kosten 52 Reichsthaler. Diese sind 9 mal in 468. Also sind dafür 9 Ochsen und 9 Pferde gekauft. Die Summe 2 p, oder 1302 Rthlr. aber können so verwendet seyn, daß 1) keine Ochsen weiter gekauft sind, 2) daß für 1 p, oder für 651 Rthlr., oder 3) für 2 p, das ist, für 1302 Rthlr. Ochsen gekauft sind. Also

y oder die Anzahl Ochsen ist entweder $9 + 0$

oder $9 + \left(\frac{651}{21} = 31\right) = (9+31) = 40$

oder $9 + \left(\frac{2.651}{21} = 2.31\right) = (9+62) = 71$

Im ersten Falle muß (damit die Summe 1770 heraus komme) seyn z = 51, im zweyten = 30, im dritten = 9. Wäre nun die Anzahl Ochsen als gerade bestimmt; so wäre die Aufgabe, genau zu reden, nicht unbestimmend.

Doch

Doch folgende Auflösung derselben Aufgabe ist regelmäßiger:

$21\,y + 31\,z = 1770$: Folglich $y = \frac{1770 - 31\,z}{21}$

Folglich (wenn dividirt wird durch 21)

$$y = 84 - z + \frac{6 - 10\,z}{21}$$

$y = (84 - z) - r$ (weil $\frac{6 - 10\,z}{21}$ negativ ist)

$6 - 10\,z = -21\,r$, oder $10\,z - 6 = 21\,r$.

No. 1.) $z = \frac{21\,r + 6}{10} = 2\,r + \frac{r + 6}{10} = 2\,r + s$

$r + 6 = 10\,s$

No. 2.) $r = 10\,s - 6$

No. 3.) $z = 20\,s - 12 + s = 21\,s - 12$, nur muß die Summe 1770, wenn z durch 31 multiplicirt wird, nicht übertroffen werden. Also kann seyn

$s = 1$ und $z = 9$ $s = 3$ und $z = 51$

$s = 2$ und $z = 30$ s nicht 4, und z nicht grösser als 51, weil $(21 . 4) - 12$, das ist 72, ferner multiplicirt durch 31, das Product 2232 (> 1770) geben würde, da $51 . 31$ nur 1581 (< 1770) ist, und folglich z, als 51, möglich war.

Bey Aufgaben dieser Art ist eine der allgemeinen Regeln diese, daß man durch Division die allerkleinste unbestimmte Zahl w, oder diejenige suche, nach welcher sich (wenn sie mit

bekannten Zahlen in Verbindung gesetzt wird) die, nach der letzten Absicht gesuchte unbekannte, Grösse v so richtet, daß, wenn man eine derselben grösser oder kleiner annimmt, die andre auch grösser oder kleiner angenommen werden muß.

Eine andre Aufgabe. Von 4 Zahlen, x, y, z, t, soll die Summe der beyden ersten die dritte, und ihre Differenz die vierte Zahl seyn. Also

$$\left.\begin{array}{l} x+y=z \\ x-y=t \end{array}\right\}$$ Fundamentalgleichungen.

$2y=z-t$ Ihre Differ.	$2x=z+t$ Ihre Summe.
$y=(z-t):2$	$x=(z+t):2$

Die Arbeit an solchen Aufgaben giebt uns nur allgemeine Lehrsätze von Zahlen oder Grössen . . Z. E. die Folgerungen zeigen, daß x sey eine jede halbe Summe zweyer gewählten Zahlen; y die halbe Differenz eben derselben Zahlen, und z und t die beyden gewählten Zahlen. Wählt z. E. 15 als z, 13 als t; so ist $x=(15+13):2=14$; und $y=(15-13):2=1$. Denn alsdann ist $x+y=(14+1)=15=z$, und $x-y=14-1=13=t$.

Eine andere Aufgabe, welche von Ungeübten übergangen werden mag, sey diese: xy soll seyn $=w^3$ (das Cubik von w) und $xy^2=w$. Man dividire die erste Gleichung durch die letzte.

1)

1) $x y = w^5$

2) $x y^2 = w$

So ist $1 : y = w^2$

oder $1 : w^2 = y$

Folglich $x (1 : w^2) = w^3$ (No. 1.)

oder $x = w^3 \, w^2 = w^5$.

Folglich $w^5 \, y = w^3$ also $y = \frac{1}{w^2}$.

Das ist, man wähle irgend eine Zahl als w, z. E. 4; so ist ihre fünfte Potenz z. E. $1024 = x$, und die durch ihre zweyte Potenz, oder durch 16 dividirte Einheit, oder $\frac{1}{16}$ ist $= y$.

Z. E. $1024 \cdot \frac{1}{16} = 64 = 4^3$

$1024 \cdot (\frac{1}{16})^2 = \frac{1}{256} \cdot 1024 = 4$.

Noch eine solche Aufgabe. Die Summe der bekannten Quadrate $a^2 + b^2$ soll gleich seyn der Summe anderer unbekannter Quadrate $v^2 + w^2$.

1) $a^2 + b^2 = v^2 + w^2$

2) $v < a$. Und $w > b$ (durch Willkühr)

3) $v = a - z$. Und $w = b + u$

4) $a^2 + b^2 = (a^2 - 2az + z^2) + (b^2 + 2ub + u^2)$

5) $0 = -2az + z^2 + 2ub + u^2$

6) $2az = z^2 + ub + u^2$

7) $u = yz$ (durch Willkühr)

8) $2az = z^2 + 2yzb + y^2 z^2$

9) $2a = z + 2yb + y^2 z$

10) $2a - 2yb = (1 + y^2) z$

11) $z = \frac{2a - 2yb}{1 + y^2}$

12)

12) $a - z = v = a - \frac{(2a - 2yb)}{1 + y^2} = \frac{y^2 a + 2yb - a}{y^2 + 1}$

13) $u = \frac{2ay - 2y^2 b}{1 + y^2}$ (No. 7 und 11.)

14) $w +$ (oder $b + u$) $= b + \frac{2ay - 2y^2 b}{1 + y^2}$

15) $w = \frac{b + 2ay - y^2 b}{1 + y^2}$

Das ist: wählet irgend eine Zahl als y, und bestimmt daraus, nach No. 12 und 15, den Wehrt von v und w; so werden $v^2 + w^2$ seyn $= a^2 + b^2$. Daß ich (No. 7.) u als yz ansah, stand frey, weil jede Zahl ein Product jeder andern ist, wenn man den Factor darnach einrichtet; und eben dasselbe war bequem, um für z eine Rationalzahl zu erhalten, (§. 79.) damit auch v und w rational würden. Die Hülfsmittel, deren man sich bey unbestimmenden Aufgaben bedienen muß, sind jedesmal aus dem Zwecke und den Umständen einem Geübten durch Nachdenken erfindlich. Die von Herrn Euler und andern grossen Algebraisten erfundnen Regeln, erleichtern die Sache in manchen Fällen. Gnug davon in diesem Vorschmacke der Algebra.

Nur will ich noch erwähnen, daß die Regel, nach welcher man aus einer einzigen Gleichung und aus andern Umständen entweder 2 Zahlen wirklich bestimmen, oder doch schliessen kann, auf wie mancherley Art sie bestimmlich sind, die Coeci-Regel heisse.

§. 82.

§. 82.

Sowohl bey unbestimmenden Aufgaben, als auch bey bestimmenden, wenn wir die Regel der Auflösung nicht wissen, behelfen wir uns mit Versuchen durch diese und jene Zahl, von der wir etwa vermuthen, daß sie die unbekannte Grösse sey. Damit man aber nicht zu sehr ins Wilde hinein vermuthe, ist es zuvor nützlich, die Gränzen der Kleinheit und Grösse, zwischen welchen die Zahl seyn muß, zu untersuchen, und alsdann auf eine Art, die im XIIten Hauptstücke folgen wird, sich der wahren Wurzel zu nähern.

VII.

Von (geometrischer) Proportion und Progression.

§. 83.

Die Grösse des Quotienten in der Division einer Zahl (oder Grösse) g, durch eine andre z, heißt das Verhältniß der Zahl g zur Zahl z. Also $\frac{12}{4}$, oder 12:4, oder 3 ist das Verhältniß der Zahl 12 zur Zahl 4.

Wenn nun die Grösse dieses Bruchs oder Quotienten (weil der Bruch unächt ist, wie $\frac{12}{4}$, oder verkleinert ausgedrückt werden kann, wie $\frac{6}{12}$) ein verständlicheres Grössenzeichen leidet; (wie in den beyden Exempeln $\frac{12}{4} = 3$, und $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$) so heißt

 das

das verständlichere Zeichen der Exponent desjenigen Verhältnisses, welchem es gleich ist. Von dem Verhältnisse $\frac{12}{4}$ ist 3, von $\frac{6}{12}$ ist $\frac{1}{2}$ der Exponent.

Zwey Gegenverhältnisse entstehen, wenn man das vorige Dividend zum Divisor, und den vorigen Divisor zum Dividenden macht; z. E. $\frac{12}{4}$, $\frac{4}{12}$, so auch $\frac{6}{12}$, $\frac{12}{6}$, so auch $(1\frac{1}{2} : \frac{1}{4})$ $(\frac{1}{4} : 1\frac{1}{2})$ Kurz, eines jeden Verhältnisses Gegenverhältniß ist (§. 39.) seine eigne Kleinheit.

Es giebt viele gleiche Verhältnisse. Denn es giebt viele gleiche Brüche in verschiednem Ausdrucke. Z. E. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$; so auch $\frac{9}{3}$, $\frac{15}{5}$.

Es ist also unmittelbar klar, daß sowohl die Exponenten gleicher Verhältnisse unter sich, als ihre Gegenverhältnisse unter sich gleich sind. Auch folgt aus der Gleichheit zweyer Exponenten, oder zweyer Gegenverhältnisse, die Gleichheit der Verhältnisse. Die Verhältnisse $\frac{25}{100}$ und $\frac{4}{16}$ sind gleich. Beyder Exponent ist $\frac{1}{4}$. Die Gegenverhältnisse $\frac{100}{25}$, $\frac{16}{4}$, sind beyderseits 4.

§. 84.

Die Ordnung von 4 Zahlen, wenn das Verhältniß der ersten zur andern gleich ist dem Verhältnisse der dritten zur vierten, heißt eine Proportion. Z. E.

Erstlich $2:4 = 6:12$. Und $\frac{1}{2}:1 = 3:6$. U. $2:2\frac{2}{3} = 5:6\frac{2}{3}$.
Zweytens $4:2 = 12:6$. Und $1:\frac{1}{2} = 6:3$. U. $2\frac{2}{3}:2 = 6\frac{2}{3}:5$.

In

In den ersten Exempeln, wo die grössre Zahl jedes Paars voran steht, heißt die Proportion zunehmend, in den zweyten Exempeln abnehmend. Es kann aber keine Proportion seyn, wenn nicht beyde Paare entweder in Ordnung der Zunahme, oder in Ordnung der Abnahme stehn. Denn eine zunehmende Ordnung in einem Verhältnisse, z. E. 4:6, giebt einen ächten, also kleinern, Bruch, wie die abnehmende Ordnung in einem Verhältnisse, welche einen unächten, und folglich grössern Bruch giebt. Z. E. 6:4.

Der Exponent mag eine Totalzahl seyn oder ein Bruch, oder aus beyden vermischt; so ist e, der Exponent, beyden Paaren oder Verhältnissen gemeinschaftlich. (§. 83.)

Es sey die Proportion $a:b = c:d$, unsere beständige Formel der ursprünglichen Proportion, aus welcher wir Folgen ziehen wollen. Es sey also a das erste Proportionalglied; b das zweyte; c das dritte; d das vierte.

Es sey $a:b = c:d$, oder der Bruch $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Es kann c aber immer aus a werden, durch Multiplication, vermittelst eines Factors, den ich f nennen will. Dieser Factor ist 1, wenn $c = a$, er ist ein ächter Bruch, wenn $c < a$, er ist eine grössere Zahl (als ein ächter Bruch) wenn $c > a$. Wenn c also af ist; so muß $d = bf$ seyn, weil (§. 31.) die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{af}{bf}$ gleich sind, und

weil

weil also, wenn statt b f im zweyten Nenner etwas andres gesetzt wird, etwas Ungleiches entstehen muß.

§. 85.

Wir haben also aus dem Vorigen, (§. 84.) damit es besser in die Augen falle, folgende Sätze:

No. 1) $a:b = c:d$. $5:15 = 9:27$.

No. 2) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. $\frac{5}{15} = \frac{9}{27}$.

No. 3) $\frac{a}{b}$ oder $\frac{c}{d}$ ist $= e$, dem Exponenten.

Z. E. $(\frac{5}{15} = \frac{9}{27}) = \frac{1}{3}$.

No. 4) Also $a = be$. Und $c = de$.

Z. E. $5 = (\frac{1}{3} . 15)$. Und $9 = (\frac{1}{3} . 27)$.

No. 5) Und $c = af$. $d = bf$.

$9 = (5 . 1\frac{4}{5})$. $27 = (15 . 1\frac{4}{5})$.

§. 86.

Das Product der beyden äussersten Glieder ad ist gleich dem Producte der beyden mittelsten bc. Z. E. Wenn $5 : 15 = 9 : 27$, so ist $(5 . 27) = (15 . 9)$. Denn (§. 85. No. 5) $ad = a(bf)$. Und $bc = b(af)$. Aber $a(bf) = b(af)$ (§. 54. No. 7.) Also $ad = bc$. Daher (§. 55. No. 11.) ist $d = (bc) : a$.

Das ist, ihr findet zu dreyen die vierte Proportionalzahl nach der Regel, welche die Regel De-Tri heißt, wenn ihr

ent-

entweder das Product der beyden mittelsten Glieder, durch das erste Glied dividirt. Z. E. $5:15=9:d$, Also $(15 \cdot 9):5=27=d$.

oder nur irgend eines der mittelsten Glieder durch das erste dividirt, und den Quotienten durch das noch nicht gebrauchte mittelste Glied multiplicirt. Z. E. $(15:5) \cdot 9 = 27 = d$. Und $(9:5) \cdot 15 = 27 = d$.

Und noch auf eine andre Art. Setzet nämlich, euch sey der Exponent e, des Verhältnisses $a:b$, ohne Division bekannt; so nehmt das umgekehrte e (oder §. 39 die Kleinheit des e, das ist, $\frac{1}{e}$) und multiplicirt durch dieselbe das dritte Glied c. Z. E. e ist in unserm Exempel $\frac{1}{3}$, die Kleinheit desselben ist 3, (weil $\frac{1}{1:3}$ oder das umgekehrte $\frac{1}{3}$, die Zahl $\frac{3}{1}$ oder die Zahl 3 ist) c ist in diesem Exempel 9, multiplicirt es durch 3, so kömmt d oder 27.

Denn weil $e = \frac{a}{b}$; so ist (§. 39.) E (oder das umgekehrte e) $= \frac{b}{a}$. Es ist $c = d\,e$ (§. 84.) Also $d = c:e = c:\frac{a}{b} = c \cdot \frac{b}{a}$ (§. 42.) $= c\,E$. Daher findet man in der Proportion $12:3 = 16:d$, das $d = \frac{3 \cdot 16}{12} = \frac{16}{12} \cdot 3 = \frac{3}{12} \cdot 16 = 4$.

§. 87.

Allemal wenn die Producte der aussersten und mittelsten Glieder gleich sind, oder

wenn

wenn a d (z. E. 3.4) = b c (z. E. 2.6); so ist wahr folgende Proportion:

$a : b = c : d$

oder $3 : 2 = 6 : 4$.

Denn $ad = bc$.

$ad : b = c$ (§. 55. No. 11.)

$a : b = c : d$.

§. 88.

Daher, wenn man die Proportionalglieder so versezt, (oder auf andre Art verändert) daß das Product der äussersten Glieder gleich bleibt dem Producte der mittelsten; so bleibt Proportion in der neuen Ordnung. Also wenn die Proportion ist

$a : b = c : d$

$3 : 2 = 6 : 4$

so bleibt Proportion in folgenden Umständen:

1) Verwechselt ein äusserstes Glied mit dem andern.

$d : b = c : a$ $4 : 2 = 6 : 3$.

2) Verwechselt ein Mittelglied mit dem andern.

$a : c = b : d$ $3 : 6 = 2 : 4$.

3) Thut beydes zugleich.

$d : c = b : a$ $4 : 6 = 2 : 3$.

4)

4) Macht die beyden Mittelglieder zu den äussersten, und die beyden äussersten zu den mittelsten, und zwar auf allerley mögliche Art.

$b : a = d : c$	$2 : 3 = 4 : 6.$
$b : d = a : c$	$2 : 4 = 3 : 6.$
$c : a = d : b$	$6 : 3 = 4 : 2.$
$c : d = a : b$	$6 : 4 = 3 : 2.$

Durch solche Versetzung könnt ihr, wenn eins der 4 Glieder, es sey das erste, zweyte, dritte oder vierte, euch unbekannt oder X ist, es leicht zum vierten machen, um die Regel De-Tri (§. 86.) ausüben zu können. Z. E.: $a : X = c : d.$ Setzet $c : d = a : X$, u. s. w.

§. 89.

Aber für Geübte ist dieser Behelf nicht nöthig. Sie dividiren, um irgend eine der 4 Proportionalzahlen zu finden, allemal das, durch beyde Factoren bekannte, Product, es sey a d oder b c, (nämlich dasjenige, in welchem das unbekannte Glied, oder X, nicht steht,) durch den bekannten Factor des andern Products, von welchem X ein Factor ist. Z. E. Es sey aufgegeben: $6 : 4 = X : 2$; so ist $X = (6 . 2) : 4.$ Der Beweis ist (§. 86.) wie oben.

§. 90.

Die Glieder einer Proportion, die beyde zusammen, entweder in dem Producte a d, oder in dem

dem Producte b c, stehen, nenne ich unter einander widrig; also sind a und d einander widrig, auch b und c. Ein jedes Paar andre Glieder, z. E. a und b, a und c, b und d, nenne ich unter einander harmonisch.

Alsdann sage ich: die Proportion wi[rd] nicht gestört, wenn ihr 2 harmonische Gli[e]der durch einerley Zahl entweder multip[li]cirt oder dividirt. Z. E.

$a : b = c : d$	$3 : 2 = 6 : 4.$
$az : bz = c : d$	$(3.5):(2.5)=6:4.$
$a : b = cz : dz$	$3 : 2 = (6.5):(4.5)$
$az : bz = cn : dn$	$(3.5):(2.5)=(6.7):(4.7)$
$az : b = cz : d$	$(3.5):2=(6.5):4$
$a : bz = c : dz$	$3:(2.5)=6:(4.5)$
$\frac{a}{z} : \frac{b}{z} = c : d$	$\frac{3}{5} : \frac{2}{5} = 6 : 4.$
$a : b = \frac{c}{z} : \frac{d}{z}$	$3 : 2 = \frac{6}{5} : \frac{4}{5}.$
$\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = \frac{c}{z} : \frac{d}{z}$	$\frac{3}{7} : \frac{2}{7} = \frac{6}{5} : \frac{4}{5}.$
$\frac{a}{n} : b = \frac{c}{n} : d$	$\frac{3}{7} : 2 = \frac{6}{7} : 4.$
$a : \frac{b}{n} = c : \frac{d}{n}$	$3 : \frac{2}{7} = 6 : \frac{4}{7}.$

Der Beweis ist dieser: Von zwey harmo-nischen Gliedern kömmt eins in das Product der äussersten Glieder a d, das andre in das Product der mittel-

mittelsten Glieder bc. Wenn nun dort in ad, und hier in bc ein Factor beyderseits durch einerley Zahl ntweder multiplicirt oder dividirt wird: so werden ie Producte der äussersten Glieder und der mittelsten lieder, nämlich ad und bc, welche sich gleich wa- n, verwandelt in lauter andre Producte, die sich ch gleich sind. Daher wird (§. 87.) die Propor- n nicht gestört. Daß die gesetzten Producte aber ich bleiben, erhellet daher, weil die durch vor- gige Multiplication oder Division an einem tor geschehene Veränderung, nach dem Grössen- sse des hinzukommenden Factors oder Divisors, as Product übergeht; weil also das Product ad mittelst seines Factors, und das Product bc mittelst des seinigen, gleiche Veränderung lei- , und beyde also unter einander nicht ungleich den können, da sie vorher gleich waren. Ich l ein einziges der angeführten Exempel besonders eisen. Ich sage, weil $a : b = c : d$, und folg- $ad = bc$; so ist auch folgende Ordnung eine portion:

$az : bz$ $cn : dn$. Denn (§. 55. No 5.)

$z)(dn) = (ad)(zn) = (bc)(zn) = (bz)(cn)$.

so unmittelbar $(az)(dn) = (bz)(cn)$.

so (§. 87.) $az : bz = cn : dn$.

§. 91.

Wenn ihr vermittelst derselben Zahl eins der widrigen Glieder, das ist, eins der äussersten oder der mittelsten Glieder, durch Multiplication, das

12) $a - z = v = a - \frac{(2a - 2yb)}{1+y^2} = \frac{y^2 a + 2yb - a}{y^2+1}$

13) $u = \frac{2ay - 2y^2 b}{1+y^2}$ (No. 7 und 11.)

14) $w + (\text{oder } b+u) = b + \frac{2ay - 2y^2 b}{1+y^2}$

15) $w = \frac{b + 2ay - y^2 b}{1+y^2}$

Das ist: wählet irgend eine Zahl als y, und bestimmt daraus, nach No. 12 und 15, den Wehrt von v und w; so werden $v^2 + w^2$ seyn $= a^2 + b^2$. Daß ich (No. 7.) u als y z ansah, stand frey, weil jede Zahl ein Product jeder andern ist, wenn man den Factor darnach einrichtet; und eben dasselbe war bequem, um für z eine Rationalzahl zu erhalten, (§. 79.) damit auch v und w rational würden. Die Hülfsmittel, deren man sich bey unbestimmenden Aufgaben bedienen muß, sind jedesmal aus dem Zwecke und den Umständen einem Geübten durch Nachdenken erfindlich. Die von Herrn Euler und andern grossen Algebraisten erfundnen Regeln, erleichtern die Sache in manchen Fällen. Gnug davon in diesem Vorschmacke der Algebra.

Nur will ich noch erwähnen, daß die Regel, nach welcher man aus einer einzigen Gleichung und aus andern Umständen entweder 2 Zahlen wirklich bestimmen, oder doch schliessen kann, auf wie mancherley Art sie bestimmlich sind, die Coeci-Regel heisse.

§. 82.

§. 82.

Sowohl bey unbestimmenden Aufgaben, als auch bey bestimmenden, wenn wir die Regel der Auflösung nicht wissen, behelfen wir uns mit Versuchen durch diese und jene Zahl, von der wir etwa vermuthen, daß sie die unbekannte Grösse sey. Damit man aber nicht zu sehr ins Wilde hinein vermuthe, ist es zuvor nützlich, die Gränzen der Kleinheit und Grösse, zwischen welchen die Zahl seyn muß, zu untersuchen, und alsdann auf eine Art, die im XIIten Hauptstücke folgen wird, sich der wahren Wurzel zu nähern.

VII.

Von (geometrischer) Proportion und Progression.

§. 83.

Die Grösse des Quotienten in der Division einer Zahl (oder Grösse) g, durch eine andre z, heißt das Verhältniß der Zahl g zur Zahl z. Also $\frac{12}{4}$, oder 12:4, oder 3 ist das Verhältniß der Zahl 12 zur Zahl 4.

Wenn nun die Grösse dieses Bruchs oder Quotienten (weil der Bruch unächt ist, wie $\frac{12}{4}$, oder verkleinert ausgedrückt werden kann, wie $\frac{6}{12}$) ein verständlicheres Grössenzeichen leidet; (wie in den beyden Exempeln $\frac{12}{4} = 3$, und $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.) so heißt

 das

das verständlichere Zeichen der Exponent desjenigen Verhältnisses, welchem es gleich ist. Von dem Verhältnisse $\frac{12}{4}$ ist 3, von $\frac{6}{12}$ ist $\frac{1}{2}$ der Exponent.

Zwey Gegenverhältnisse entstehen, wenn man das vorige Dividend zum Divisor, und den vorigen Divisor zum Dividenden macht; z. E. $\frac{12}{4}$, $\frac{4}{12}$, so auch $\frac{6}{12}$, $\frac{12}{6}$, so auch $(1\frac{1}{2} : \frac{1}{4})$ $(\frac{1}{4} : 1\frac{1}{2})$ Kurz, eines jeden Verhältnisses Gegenverhältniß ist (§. 39.) seine eigne Kleinheit.

Es giebt viele gleiche Verhältnisse. Denn es giebt viele gleiche Brüche in verschiednem Ausdrucke. Z. E. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$; so auch $\frac{9}{3}$, $\frac{36}{12}$.

Es ist also unmittelbar klar, daß sowohl die Exponenten gleicher Verhältnisse unter sich, als ihre Gegenverhältnisse unter sich gleich sind. Auch folgt aus der Gleichheit zweyer Exponenten, oder zweyer Gegenverhältnisse, die Gleichheit der Verhältnisse. Die Verhältnisse $\frac{25}{100}$ und $\frac{4}{16}$ sind gleich. Beyder Exponent ist $\frac{1}{4}$. Die Gegenverhältnisse $\frac{100}{25}$, $\frac{16}{4}$, sind beyderseits 4.

§. 84.

Die Ordnung von 4 Zahlen, wenn das Verhältniß der ersten zur andern gleich ist dem Verhältnisse der dritten zur vierten, heißt eine Proportion. Z. E.

Erstlich $2:4 = 6:12$. Und $\frac{1}{2}:1 = 3:6$. U. $2:2\frac{2}{3} = 5:6\frac{2}{3}$.
Zweytens $4:2 = 12:6$. Und $1:\frac{1}{2} = 6:3$. U. $2\frac{2}{3}:2 = 6\frac{2}{3}:5$.

In

In den ersten Exempeln, wo die größre Zahl jedes Paars voran steht, heißt die Proportion zunehmend, in den zweyten Exempeln abnehmend. Es kann aber keine Proportion seyn, wenn nicht beyde Paare entweder in Ordnung der Zunahme, oder in Ordnung der Abnahme stehn. Denn eine zunehmende Ordnung in einem Verhältnisse, z. E. 4:6, giebt einen ächten, also kleinern, Bruch, wie die abnehmende Ordnung in einem Verhältnisse, welche einen unächten, und folglich grössern Bruch giebt. Z. E. 6:4.

Der Exponent mag eine Totalzahl seyn oder ein Bruch, oder aus beyden vermischt; so ist e, der Exponent, beyden Paaren oder Verhältnissen gemeinschaftlich. (§. 83.)

Es sey die Proportion $a:b = c:d$, unsere beständige Formel der ursprünglichen Proportion, aus welcher wir Folgen ziehen wollen. Es sey also a das erste Proportionalglied; b das zweyte; c das dritte; d das vierte.

Es sey $a:b = c:d$, oder der Bruch $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Es kann c aber immer aus a werden, durch Multiplication, vermittelst eines Factors, den ich f nennen will. Dieser Factor ist 1, wenn $c = a$, er ist ein ächter Bruch, wenn $c < a$, er ist eine grössere Zahl (als ein ächter Bruch) wenn $c > a$. Wenn c also af ist; so muß $d = bf$ seyn, weil (§. 31.) die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{af}{bf}$ gleich sind, und

weil

weil also, wenn statt b f im zweyten Nenner etwas andres gesetzt wird, etwas Ungleiches entstehen muß.

§. 85.

Wir haben also aus dem Vorigen, (§. 84.) damit es besser in die Augen falle, folgende Sätze:

No. 1) $a : b = c : d$. $5 : 15 = 9 : 27$.

No. 2) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. $\frac{5}{15} = \frac{9}{27}$.

No. 3) $\frac{a}{b}$ oder $\frac{c}{d}$ ist $= e$, dem Exponenten.

Z. E. $(\frac{5}{15} = \frac{9}{27}) = \frac{1}{3}$.

No. 4) Also $a = be$. Und $c = de$.

Z. E. $5 = (\frac{1}{3} . 15)$. Und $9 = (\frac{1}{3} . 27)$.

No. 5) Und $c = af$. $d = bf$.

$9 = (5 . 1\frac{4}{5})$. $27 = (15 . 1\frac{4}{5})$.

§. 86.

Das Product der beyden äussersten Glieder $a d$ ist gleich dem Producte der beyden mittelsten $b c$. Z. E. Wenn $5 : 15 = 9 : 27$, so ist $(5 . 27) = (15 . 9)$. Denn (§. 85. No. 5) $a d = a (b f)$. Und $b c = b (a f)$. Aber $a (b f) = b (a f)$ (§. 54. No. 7.) Also $a d = b c$. Daher (§. 55. No. 11.) ist $d = (b c) : a$.

Das ist, ihr findet zu dreyen die vierte Proportionalzahl nach der Regel, welche die Regel De-Tri heißt, wenn ihr

ent-

entweder das Product der beyden mittelsten Glieder, durch das erste Glied dividirt. Z. E. $5:15 = 9:d$, Also $(15 \cdot 9):5 = 27 = d$.

oder nur irgend eines der mittelsten Glieder durch das erste dividirt, und den Quotienten durch das noch nicht gebrauchte mittelste Glied multiplicirt. Z. E. $(15:5) \cdot 9 = 27 = d$. Und $(9:5) \cdot 15 = 27 = d$.

Und noch auf eine andre Art. Setzet nämlich, euch sey der Exponent e, des Verhältnisses a:b, ohne Division bekannt; so nehmt das umgekehrte e (oder §. 39 die Kleinheit des e, das ist, $\frac{1}{e}$) und multiplicirt durch dasselbe das dritte Glied c. Z. E. e ist in unserm Exempel $\frac{1}{3}$, die Kleinheit desselben ist 3, (weil $\frac{1}{1:3}$ oder das umgekehrte $\frac{1}{3}$, die Zahl $\frac{3}{1}$ oder die Zahl 3 ist) c ist in diesem Exempel 9, multiplicirt es durch 3, so kömmt d oder 27.

Denn weil $e = \frac{a}{b}$; so ist (§. 39.) E (oder das umgekehrte e) $= \frac{b}{a}$. Es ist $c = d\,e$ (§. 84.) Also $d = c:e = c:\frac{a}{b} = c \cdot \frac{b}{a}$ (§. 42.) $= c\,E$. Daher findet man in der Proportion $12:3 = 16:d$, das $d = \frac{3 \cdot 16}{12} = \frac{16}{12} \cdot 3 = \frac{3}{12} \cdot 16 = 4$.

§. 87.

Allemal wenn die Producte der äussersten und mittelsten Glieder gleich sind, oder

wenn ad (z. E. 3.4) = bc (z. E. 2.6); so ist wahr folgende Proportion:

$$a : b = c : d$$

oder $3 : 2 = 6 : 4$.

Denn $ad = bc$.

$\frac{ad}{d} : b = c$ (§. 55. No. 11.)

$a : b = c : d$.

§. 88.

Daher, wenn man die Proportionalglieder so versezt, (oder auf andre Art verändert) daß das Product der äussersten Glieder gleich bleibt dem Producte der mittelsten; so bleibt Proportion in der neuen Ordnung. Also wenn die Proportion ist

$$a : b = c : d$$

$$3 : 2 = 6 : 4$$

so bleibt Proportion in folgenden Umständen:

1) Verwechselt ein äusserstes Glied mit dem andern.

$d : b = c : a$ $4 : 2 = 6 : 3$.

2) Verwechselt ein Mittelglied mit dem andern.

$a : c = b : d$ $3 : 6 = 2 : 4$.

3) Thut beydes zugleich.

$d : c = b : a$ $4 : 6 = 2 : 3$.

4)

4) Macht die beyden Mittelglieder zu den äussersten, und die beyden äussersten zu den mittelsten, und zwar auf allerley mögliche Art.

b : a = d : c	2 : 3 = 4 : 6.
b : d = a : c	2 : 4 = 3 : 6.
c : a = d : b	6 : 3 = 4 : 2.
c : d = a : b	6 : 4 = 3 : 2.

Durch solche Versetzung könnt ihr, wenn eins der 4 Glieder, es sey das erste, zweyte, dritte oder vierte, euch unbekannt oder X ist, es leicht zum vierten machen, um die Regel De-Tri (§. 86.) ausüben zu können. Z. E. a : X = c : d. Setzet c : d = a : X, u. s. w.

§. 89.

Aber für Geübte ist dieser Behelf nicht nöthig. Sie dividiren, um irgend eine der 4 Proportionalzahlen zu finden, allemal das, durch beyde Factoren bekannte, Product, es sey a d oder b c, (nämlich dasjenige, in welchem das unbekannte Glied, oder X, nicht steht,) durch den bekannten Factor des andern Products, von welchem X ein Factor ist. Z. E. Es sey aufgegeben: 6 : 4 = X : 2; so ist X = (6 . 2) : 4. Der Beweis ist (§. 86.) wie oben.

§. 90.

Die Glieder einer Proportion, die beyde zusammen, entweder in dem Producte a d, oder in dem

dem Producte bc, stehen, nenne ich unter einander widrig; also sind a und d einander widrig, auch b und c. Ein jedes Paar andre Glieder, z. E. a und b, a und c, b und d, nenne ich unter einander harmonisch.

Alsdann sage ich: die Proportion wird nicht gestört, wenn ihr 2 harmonische Glieder durch einerley Zahl entweder multiplicirt oder dividirt. Z. E.

$a : b = c : d$	$3 : 2 = 6 : 4.$
$az : bz = c : d$	$(3.5) : (2.5) = 6 : 4.$
$a : b = cz : dz$	$3 : 2 = (6.5) : (4.5)$
$az : bz = cn : dn$	$(3.5) : (2.5) = (6.7) : (4.7)$
$az : b = cz : d$	$(3.5) : 2 = (6.5) : 4$
$a : bz = c : dz$	$3 : (2.5) = 6 : (4.5)$
$\frac{a}{z} : \frac{b}{z} = c : d$	$\frac{3}{5} : \frac{2}{5} = 6 : 4.$
$a : b = \frac{c}{z} : \frac{d}{z}$	$3 : 2 = \frac{6}{5} : \frac{4}{5}.$
$\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = \frac{c}{z} : \frac{d}{z}$	$\frac{3}{7} : \frac{2}{7} = \frac{6}{5} : \frac{4}{5}.$
$\frac{a}{n} : b = \frac{c}{n} : d$	$\frac{3}{7} : 2 = \frac{6}{7} : 4.$
$a : \frac{b}{n} = c : \frac{d}{n}$	$3 : \frac{2}{7} = 6 : \frac{4}{7}.$

Der Beweis ist dieser: Von zwey harmonischen Gliedern kömmt eins in das Product der äussersten Glieder ad, das andre in das Product der

mittel-

mittelsten Glieder b c. Wenn nun dort in a d, und hier in b c ein Factor beyderseits durch einerley Zahl entweder multiplicirt oder dividirt wird: so werden die Producte der äussersten Glieder und der mittelsten Glieder, nämlich a d und b c, welche sich gleich waren, verwandelt in lauter andre Producte, die sich auch gleich sind. Daher wird (§. 87.) die Proportion nicht gestört. Daß die gesetzten Producte aber gleich bleiben, erhellet daher, weil die durch vorgängige Multiplication oder Division an einem Factor geschehene Veränderung, nach dem Grössenmaasse des hinzukommenden Factors oder Divisors, in das Product übergeht; weil also das Product a d vermittelst seines Factors, und das Product b c vermittelst des seinigen, gleiche Veränderung leiden, und beyde also unter einander nicht ungleich werden können, da sie vorher gleich waren. Ich will ein einziges der angeführten Exempel besonders erweisen. Ich sage, weil $a : b = c : d$, und folglich $ad = bc$; so ist auch folgende Ordnung eine Proportion:

$az : bz \quad cn : dn$. Denn (§. 55. No 5.)

$(az)(dn) = (ad)(zn) = (bc)(zn) = (bz)(cn)$.

Also unmittelbar $(az)(dn) = (bz)(cn)$.

Also (§. 87.) $az : bz = cn : dn$.

§. 91.

Wenn ihr vermittelst derselben Zahl eins der widrigen Glieder, das ist, eins der äussersten oder der mittelsten Glieder, durch Multiplication, das

andre widrige Glied (§. 90.) durch Division verändert, so bleibt die Proportion. Z. E.

$$a : b = c : d \qquad 3 : 2 = 6 : 4$$

$$az : b = c : \frac{d}{z} \qquad (3.5) : 2 = 6 : \tfrac{4}{5}.$$

$$a : bz = \frac{c}{z} : d \qquad 3 : (2.5) = \tfrac{6}{5} : 4.$$

$$az : \frac{b}{n} = cn : \frac{d}{z} \qquad (3.5) : \tfrac{2}{7} = (6.7) : \tfrac{4}{5}.$$

Denn die Producte der äussersten und mittelsten Glieder (da dort und hier die Veränderung des einen Factors durch die Veränderung des andern Factors aufgehoben wird) bleiben gleich, folglich bleibt (§. 87.) Proportion.

§. 92.

Es giebt in der Proportion 4 harmonische Paare, (§. 89.) nämlich

1) a und b. 2) c und d.
3) a und c. 4) b und d.

Das erste Paar nenne ich dem andern, und das andre dem ersten zugeordnet; so auch das dritte Paar dem vierten, und das vierte dem dritten, (weil §. 87. nämlich die beyden ersten Paare sowohl, als die beyden letzten, eine Proportion geben.) In jedem Paar aber heisse ich das erste Glied den Zähler, das andre Glied den Nenner.

Nun sage ich: Wenn man zu dem Zähler eines zugeordneten Paares den Zähler des andern zugeordneten Paares, und zu dem Nenner den Nenner

ner addirt, oder von jenem Zähler dieſen Zähler, von jenem Nenner dieſen Nenner ſubtrahirt: ſo bleibt Proportion. Z. E.

$a : b = c : d \qquad 20 : 12 = 5 : 3.$
$(a+c) : (b+d) = c : d \qquad (20+5) : (12+3) = 5 : 3.$
$a : b = (c+a) : (d+b) \qquad 20 : 12 = (5+20) : (3+12).$
$a-b : b = (c-d) : d \qquad (20-12) : 12 = (5-3) : 3,$ u. ſ. w.

Der Beweis iſt dieſer. Zwey zugeordnete Paare geben allezeit eine Proportion, die ihr anſehn könnt, (§. 85.) als $a : b = af : bf$. Nun iſt

$$a \pm af = (1 \pm f)\, a$$
$$b \pm bf = (1 \pm f)\, b$$

Alſo iſt $(a \pm c) : (b \pm d) = (a \pm af) : (b \pm bf) = (1 \pm f)\, a : (1 \pm f)\, b = a : b = c : d.$ (§. 90.) Alſo unmittelbar $a \pm c : b \pm d = c : d$.

Nach dieſer Regel entſteht in einem gewiſſen Falle Etwas, welches ſonderbar ſcheint. Es ſey $a : b = c : d$. Folglich $(a - c) : b - d = c : d$. Nun erfahre man, es ſey $a = c$ und $b = d$; ſo kömmt die Proportion $0 : 0 = c : d$. Nun können aber c und d ungleich ſeyn, da doch eine Nulle der andern gleich iſt. Wir müſſen alſo alle Proportionalregeln mit der Ausnahme verſtehn, daß die Nulle mit Zahlen nicht in Proportion komme.

§. 93.

Zuweilen bestehen einige Glieder der Proportion aus Producten. Wenn euch nun alles Uebrige, ausser einem Factor eines der 4 Glieder, bekannt ist, und ihr diesen Factor finden wollt, wie in dem Exempel $8 : 12 = 64 : 9\,X$; so sucht (§. 89.) das ganze Glied, worinnen X steht, und dividirt das Kommende durch die bekannten Factoren desselben, alsdann kömmt X. Zum Exempel: $\frac{12 . 64}{8} : 9 = 10\frac{2}{3} = X$. Bey solchen Exempeln, besonders wenn auch die andern Glieder aus Producten bestehn, könnt ihr euch der Vortheile der Productrechnung bedienen, (§. 49.) Z. E.

$$X = \begin{array}{cc} \text{Nenner} & \text{Zähler} \\ 8 & 12 \\ 9 & 64 \end{array} = \frac{32}{3} \text{ ist } 10\frac{2}{3}.$$

Solche Exempel in der Proportionalrechnung sind es, die man bald so, bald anders betitelt, wie die Exempel der Regel de Quinque.

§. 94.

Folgende 3 Sätze sind Proportionen:

$a : b = c : d$	$2 : 3 = 6 : 9.$
$q : r = s : t$	$7 : 5 = \frac{1}{5} : \frac{1}{7}.$
$u : v = w : x$	$\frac{2}{3} : 3 = 4 : 18.$
$e : f = g : h$	$9\frac{1}{3} : 45 = 4\frac{4}{5} : 23\frac{1}{7}.$

Es sey e das Product aller ersten Zähler; f das Product aller ersten Nenner; g das Product aller

zweyten Zähler, h das Product aller zweyten Nenner dieſer Proportionen. Ich ſage, es wird ſeyn

$$e : f = g : h, \text{ oder } 9\tfrac{1}{3} : 45 = 4\tfrac{4}{5} : 23\tfrac{1}{7}.$$

Und gleichfalls wird, in allen ſo gemachten Producten vieler Proportionen, Proportion bleiben. Der Beweis iſt folgender: $ad = bc$. Und $qt = rs$. Und $ux = vw$. Alſo $ad\,qt\,ux = bc\,rs\,vw$. Alſo $(aqu)(dtx) = (brv)(csw)$. Es iſt aber $aqu = e$. Und $dtx = h$. Und $brv = f$. Und $csw = g$. Alſo iſt $eh = fg$. Daher (§. 87.) $e : f = g : h$.

Da nun die Diviſion (§. 39.) eine Art der Multiplication iſt; ſo muß auch **Proportion in den Quotienten bleiben**, wenn man eine Proportion durch die andre dividirt. Z. E.

$$\begin{array}{c} a : b = c : d \\ e : f = g : h \\ \hline \frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 12 : 8 = 3 : 2 \\ 4 : 2 = \frac{5}{6} : \frac{5}{12} \\ \hline 3 : 4 = 3\tfrac{3}{5} : 4\tfrac{4}{5}. \end{array}$$

§. 95.

Folgendes iſt eine **Kette von Verhältniſſen**, nämlich wenn das zweyte Glied des erſten Verhältniſſes das erſte Glied des zweyten Verhältniſſes, ferner, wenn das zweyte Glied des zweyten Verhältniſſes das erſte Glied des dritten Verhältniſſes wird, u. ſ. w.

a : b	4 : 12
b : c	12 : 3
c : d	3 : 15
d : e	15 : 20

In solcher Kette heißt, das Verhältniß des ersten und letzten Gliedes, aus allen Verhältnissen der Kette zusammengesetzt. Z. E. 4 : 20 ist hier zusammengesetzt aus 4 : 12, und 12 : 3, und 3 : 15, und 15 : 20.

Man schreibe vor jedem Verhältnisse, das in der Kette ist, ein ihm gleiches Verhältniß, Z. E.

m : n = a : (b)	3 : 9 = 4 : (12)
o : p = (b) : (c)	$1 : \frac{1}{4}$ = (12) : (3)
q : r = (c) : (d)	$\frac{2}{5} : 2$ = (3) : (15)
s : t = (d) : X	3 : 4 = (15) : 20
A : B = C : D	A : B = C : D

Man multiplicire diese Proportionen; so ist Proportion (§. 94.) in den Producten A : B = C : D. Folglich A : B = a : x. Denn a ist das durch bcd dividirte C, und X ist das durch bcd dividirte D. Es ist also (§. 90.) Proportion geblieben. Nun ist in dem Zahlenexempel A : B = $3\frac{3}{5}$: 18. Und C : D = 4 : 20. Also $3\frac{3}{5}$: 18 = 4 : 20, welches man wahr findet.

Nun nenne ich einem jeden, in der Kette stehenden, Verhältnisse das ihm zur Seite stehende gleiche Verhältniß zugeordnet. Z. E. dem Verhältnisse 4 : 12, ist das Verhältniß 3 : 9, und dem Verhältnisse

hältnisse 15:20, ist das Verhältniß 3:4 zugeordnet. Also ist das Verhältniß des ersten zum letzten Gliede einer Verhältnißkette gleich, dem Verhältnisse des Products aller Zähler (oder ersten Glieder) zu dem Producte aller Nenner (oder zweyten Glieder) der zugeordneten Verhältnisse; (und zwar auch, wenn das Verhältniß dieser Producte, durch die Productrechnung (§. 49.) verkleinert, ausgedrückt wird.) Also findet ihr das letzte Glied einer Verhältnißkette, oder ihr findet X, wenn ihr das erste Glied der Kette durch das Product der Nenner der zugeordneten Verhältnisse multiplicirt, und alsdann das Kommende durch das Product ihrer Zähler dividirt.

§. 96.

No. 1.) Wenn a:b=b:c=c:d=d:l u. s. w. Z. E. wenn 2:6=6:18=18:54=54:162 u. s. w. oder wenn 162:54=54:18=18:6=6:2 u. s. w. alsdann heißt a, b, c, d, e, u. s. w. oder 2, 6, 18, 54, 162, oder umgekehrt, 162, 54, 18, 6, 2, eine Progression oder Proportionalreihe, welche entweder zunehmend ist, wie in dem ersten Zahlenexempel, oder abnehmend, wie in dem zweyten.

No. 2.) Weil wir Vieles davon zu sagen haben; so wollen wir einmal für allemal gewissen Buchstaben eine festgesetzte Bedeutung in dieser Materie geben:

g heisse die größte Zahl, die in abnehmender Reihe die erste, in zunehmender die letzte ist.

k die kleinste, ist in zunehmender Reihe die erste, in abnehmender die letzte Zahl.

e ist der Exponent, oder der Quotient, welcher kömmt, wenn man in derselben Reihe irgend ein größres Glied durch sein zunächst stehendes kleineres dividirt, und welcher also in der ganzen Reihe zwischen jedem Paare der Glieder herrscht.

No. 3.) Das Quadrat jedes Gliedes (§. 56.) ist gleich dem Producte der beyden nächsten ihm zu beyden Seiten stehenden Glieder. (Es seyn die Glieder 2, 6, 18, oder 18, 6, 2.) Denn dieß Quadrat stellt das Product der beyden mittelsten Glieder, b c vor, weil c dem b gleich ist: und das Product der äussersten ist a d. (§. 86.) Also ist das mittelste Glied die Quadratwurzel des Products der ihm zur Seite stehenden Glieder. Z. E. $6 = \sqrt{18 . 2}$ das ist $\sqrt{36}$. (§. 56. No. 2). Wenn ihr daher zu zweyen die mittlere Zahl in einer Proportionalprogression suchen sollt; so sucht die Quadratwurzel der zweyen. Die erste aber, oder dritte von dreyen findet ihr, wenn ihr das Quadrat der mittelsten, durch das bekannte Aussenglied dividirt. Denn weil in 2, 6, 18, oder in l, m, r, allezeit $m^2 = lr$; so ist $l = m^2 : r$ und $r = m^2 : l$.

No. 4.) Es sey k abermals das kleinste Glied, g das größte, e der Exponent in folgender Reihe

oder

oder Progreſſion, bey welcher ich zeigen will, wie groß die ganze Summe aller Glieder würde, wenn man ſie zu einander addirte. Dieſe Summe heiſſe S:

2	6	18	54	162	486	$= S$	$= 728$
K	A	B	C	D	G	$= S$	
K	A	B	C	D	—	$= S - G$	
—	A	B	C	D	G	$= S - K.$	

In der Zeile $S - G$ giebt jedes Glied, wenn man es durch e (in unſerm Exempel durch 3) multiplicirt, ein Glied aus der Zeile $S - K$. Z. E. A durch 3 giebt B, B durch 3 giebt C, u. ſ. w. Alſo verwandelt die Multiplication durch e oder 3 die ganze obere Zeile in die untere. Oder

$(s - g)e = s - k$, oder $es - eg = s - k$.

Alſo nach §. 54. oder nach Verſetzung

$es - s = eg - k$, oder $(e-1)s = eg - k$. Oder

$(e-1)\,s = g - k + (e-1)\,g$. Alſo

$$s = \frac{g - k + (e-1)\,g}{e-1}$$ Alſo

$$s = \frac{g - k}{e-1} + g = \frac{486-2}{2} + 486 = 728.$$

Oder mit Worten: Die Summe einer Proportionalreihe iſt der, durch den um 1 verminderten Exponenten dividirte, Unterſchied des gröſten und kleinſten Gliedes, nebſt dem gröſten Gliede. Wenn nun K, oder das kleinſte Glied in der abnehmenden Reihe

die immer fortgesetzt werden soll, (wie in 8 (= g) 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ . . . K) endlich verächtlich klein, oder so gut als Nulle wird; so ist $s = \frac{g}{e-1} + g = \frac{eg}{e-1}$. Also ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ u. s. w. = 1. Und $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$ u. s. w. = $4\frac{1}{2}$. Und eben so kann man alle proportionirt abnehmende Brüche berechnen. Z. E. $\frac{2}{5} + \frac{2}{15} + \frac{2}{45} + \frac{2}{135}$ u. s. w. $= \frac{2:5}{3-1} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

No. 5.) In einer (geometrischen) Proportionalreihe sind die Producte solcher zwey Glieder, deren eines so weit von g, dem größten Gliede, als das andre von k, dem kleinsten Gliede, absteht, allesammt dem Producte der äussersten Glieder oder dem gk, und folglich unter einander, gleich. Z. E. Es sey die Reihe

zunehmend	K,	L,	M,	N,	O,	P,	G,
oder	k,	$\overset{1}{e}k$,	$\overset{2}{e}k$,	$\overset{3}{e}k$,	$\overset{4}{e}k$,	$\overset{5}{e}k$,	$\overset{6}{e}k$,
oder (wenn k = 2, und e = 3)	2,	6,	18,	54,	162,	486,	1458,
abnehmend	G,	P,	O,	N,	M,	L,	K,
das ist	$\overset{6}{e}k$,	$\overset{5}{e}k$,	$\overset{4}{e}k$,	$\overset{3}{e}k$,	$\overset{2}{e}k$,	$\overset{1}{e}k$,	k,
oder	1458,	486,	162,	54,	18,	6,	2.

Es ist KG = LP = MO. Nämlich $KG = e^6 k^2 = e^1 e^5 k^2 = PL = e^2 e^4 k^2 = OM$. Der Grund ist folgender: Wenn O so weit von G, als M von K absteht; so wird G aus O vermittelst der Multiplication des O durch einerley Potenz des e, als durch welche vermittelst der Multiplication K

in

in M verwandelt wird. Oder so ist $ke^y = M$; und $oe^y = G$.

Also ist $e^y = \frac{M}{K} = \frac{G}{O}$

Also $OM = GK$.

Wenn also die Zahl der Glieder ungerade ist, wie in unserm Falle, wo N, das mittelste Glied, von beyden äussersten gleich weit absteht; so ist das Quadrat des mittelsten Gliedes gleich dem Producte der äussersten, folglich dem Producte eines jeden Paares, dessen ein Glied von dem kleinsten Gliede so weit absteht, als das andre von dem größten Gliede. Der Beweis ist, wie der vorige.

Nämlich $ke^y = N$. Und $Ne^y = G$

$e^y = \frac{N}{K} = \frac{G}{N}$. Folglich $N^2 = KG$.

No. 6.) Eine Reihe fortsetzen (z. E. 2, 4, . .) könnt ihr, so bald euch entweder e, der Exponent, oder zwey unmittelbar auf einander folgende Glieder bekannt sind. Denn dividirt alsdann das größre dieser Glieder durch das kleinere; so habt ihr e, den herrschenden Exponenten. Durch e multiplicirt das größre Glied, so habt ihr das weiter folgende grössere, welches, wenn ihr es wieder durch e multiplicirt, euch das weiter folgende größre Glied hervor bringt, u. s. w. Z. E.

. . . 9 27 . . .

Diese

Diese Reihe wird, durch Fortsetzung nach der Seite der grössern Glieder

. . . . 9 27, 81, 243.

Denn $\frac{27}{9} = 3$. Es ist also 3 der Exponent. Und $(27 \cdot 3) = 81$, u. s. w.

Wenn ihr aber die Reihe auch nach der Seite der kleinern Glieder fortsetzen wollt; so müßt ihr das kleinste bekannte Glied durch e, das ist, durch den Exponenten, dividiren. Der Quotient ist das weiter folgende kleinere Glied, u. s. w. Denn es sey X die kleinere Zahl die ihr sucht; K aber die unmittelbar darauf folgende, und euch bekannte grössere, Zahl; so ist $xe = k$. Also $x = k:e$. So wird die obige ganze Reihe Folgendes:

. . . $\frac{1}{3}$ 1 3 9 27 81 243 . . . .

No. 7.) Wenn ihr aber eine Reihe in der **Mitte ausfüllen sollt**; so kann es (nach dem Vorigen No. 6.) durch Fortsetzung geschehen, wenn euch entweder der Exponent oder irgendwo in der Reihe nur 2 unmittelbar auf einander folgende Glieder bekannt sind. Z. E.

$\frac{1}{8}$ . . . . . . 4, 8 . . 64.

Nämlich ihr dürft nur, aus 4, 8 den Exponenten e suchen, und alsdann nach beyden Seiten hin die Reihe fortsetzen. Sie wird

. . . $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 . . .

Wenn

Wenn aber die Ausfüllung (aus Mangel der Kenntniß von dem Exponenten, und weil keine zwey unmittelbar aufeinander folgende Glieder bekannt sind) nicht alsobald durch Fortsetzung geschehen kann: (wie in folgender Reihe)

$$\tfrac{1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16$$

oder $k \quad \overset{1}{e}k \quad \overset{2}{e}k \quad \overset{3}{e}k \quad \overset{4}{e}k \quad \overset{5}{e}k$

oder K L M N O G

so findet ihr den Exponenten e, als das Mittel der Fortsetzung und Ausfüllung, wenn ihr bedenkt, das $g = \overset{5}{e}k$, oder um allgemeiner zu reden, daß $g = e^{z-1}\,k$; wobey ich unter z die Zahl der Glieder in der ganzen unterbrochnen Reihe verstehe. Weil nun $g = e^{z-1}\,k$; so ist $g:k = e^{z-1}$. Also $\sqrt[z-1]{g:k} = e$. Das heißt so viel, als der Exponent ist alsdann von dem, aus der Division der größten Zahl durch die kleinste entstandenen Quotienten, diejenige Wurzel, deren Wurzelexponent entweder der um 1 verminderten Anzahl aller Glieder, oder der um 1 vergrösserten Anzahl der gesuchten Zwischenglieder (in der unterbrochnen Reihe) gleich ist. Z. E. $16 : \tfrac{1}{2} = 32$. Und $\sqrt[5]{32} = 2$, weil 2.2.2.2.2, oder weil $2^5 = 32$. Daher ist 2 der Exponent oder e II, in dem Exempel $\tfrac{1}{2}$ . . . 16.

No. 8.) Durch das Mittel der Ausfüllung könnt ihr in eine Reihe zwischen zwey unmittelbar

bar aufeinander folgende Glieder k und g, so viele neue Zwischenglieder, als ihr wollt, (l, m, n, o, p) so dazwischen setzen, daß k, l, m, n, o, p, g eine geometrische Reihe sey. Der Exponent e, ist alsdann (No. 7.) (wenn z die ganze Zahl der Glieder, k und g mit eingeschlossen, heißt, und wenn y hingegen die Anzahl der neuen Zwischenglieder anzeigt) ich sage, e ist $= \sqrt[z-1]{g:k} = \sqrt[y+1]{g:k}$. Denn y ist um 2 kleiner als z; oder $z = y + 2$. Also $z - 1 = y + 1$. Durch eine solche Zwischensetzung neuer Glieder wird ein **neuer herrschender Exponent, welcher kleiner**, als der vorige, und zwar desto kleiner ist, je mehr neue Glieder zwischen zwey und zwey alte Glieder zwischengesetzt werden. Das Verhältniß des alten zum neuen Exponenten, oder A : N, (wenn ihr unter g das grössere, und unter k das kleinere der alten Glieder, und unter m das kleinste der neuen Zwischenglieder versteht) ist alsdann $= \frac{g}{k} : \frac{m}{k} = g : m$.

N. 9.) Wenn ihr aus einer Reihe immer gleich viel Glieder zwischen zweyen und zweyen, welche stehen bleiben, ausmerzt, oder nur diejenigen Glieder, die nach dieser Regel stehen bleiben, allein betrachtet: **so ist die Reihe der beybehaltenen Glieder gleichfalls eine Proportionalreihe.** Z. E.

16, (4,) 1, $(\frac{1}{4})$ $\frac{1}{16}$ $(\frac{1}{64})$ $\frac{1}{256}$. Laßt die eingeschloßnen Glieder aus, so ist 16, 1, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{256}$ noch

noch immer eine Proportionalreihe. Denn die vorige Reihe konntet ihr ansehn als

$\overset{6}{e}k \quad \overset{5}{e}k \quad \overset{4}{e}k \quad \overset{3}{e}k \quad \overset{2}{e}k \quad \overset{1}{e}k \quad k$; die andre aber als

$\overset{6}{e}k \qquad \overset{4}{e}k \qquad \overset{2}{e}k \qquad k.$

Der ganze Unterschied ist, daß der Glieder weniger werden, und das vorhin e, und nun e^2 der Exponent ist.

Zusatz.

Noch eine Uebung dieser Art im algebraischen Beweise! Eine harmonische Proportion ist in der Ordnung von vier Zahlen, a, b, c, x; wenn in beyden Paaren entweder die kleinere oder die grössere voransteht, und sich der erste Unterschied zum zweyten, wie die erste Zahl zur vierten Zahl verhält. Z. E. 5, 7, 10, $16\frac{2}{3}$, oder 8, 6, 12, $9\frac{3}{5}$, oder überhaupt a, b, c, x. In allen Fällen ist $x = \frac{ca}{2a-b}$. Denn, ist die Proportion zunehmend, so ist $(b-a):(x-c) = a:x$. Also $xb - xa = ax - ac$. Oder $ac = (a-b+a)x$, oder $x = \frac{ca}{2a-b}$. Ist die Proportion aber abnehmend, so ist $(a-b):(c-x) = a:x$. Also $ax - bx = ac - ax$. Also $(a-b+a)z = ac$. Also $x = \frac{ca}{2a-b}$. Wenn also $2a$ dem b gleich, oder gar kleiner ist; so sind die Zahlen a und b zur harmonischen Proportion nicht geschickt. Wenn nun in

in dieser harmonischen Proportion c = b (z. E. (a, b, b, c) so sind a, b, c mit der Fortsetzung nach dieser Regel eine harmonische Progression, nämlich wenn sich harmonisch verhält a zu b, wie b zu c, wie c zu d, wie d zu e, u. s. w. Z. E. 2, 3, 6 sind in harmonischer Progression oder Reihe. Denn 3 — 2 : 6 — 3 = 2 : 6. Wenn nun in der harmonischen Progression a, b, c irgend ein Glied unbekannt ist, kann man es leicht finden durch die entscheidende Gleichung (a — b) : (b — c) = a : c; oder durch (b — a) : (c — b) = a : c.

VIII.

Von der Quadratischen und Cubischen Wurzel.

§. 97.

Eine Zahl, die zwey Theile hat, und folglich entweder durch a + b oder a — b, oder — a — b geschrieben wird, heißt binomisch. Daher ist die Quadratwurzel von 144 (§. 54.) binomisch, weil sie durch ein, aus zweyen zusammengesetztes, Zeichen nämlich durch 12 geschrieben wird. Denn 12 . 12 = 144. In 12, ist die Einheit der Zehner, das a; die Zweyzahl in den Einern aber ist, das b. Es ist also diese Wurzel binomisch, oder a + b. Wenn man aus gewissen Ursachen die Zahl 96 so ausdrückte (100) — 4; so wäre sie abermals binomisch, nämlich a — b. Aber — a — b, oder — (a + b) wäre

wäre auch die binomische Zahl 12, wenn sie negativ verstanden werden müßte.

Nun sehet, wie binomische Zahlen durch Multiplication (§. 62.) ins Quadrat oder zur zweyten Potenz (§. 57.) erhoben werden, und welche Producte sie geben, an folgenden Exempeln.

Erstlich	Zweytens
$a + b$	$a - b$
$a + b$	$a - b$
$+a^2 + ab$	$+a^2 - ab$
$+ ba + b^2$	$- ab + b^2$
$+a^2 + 2ab + b^2$	$a^2 - 2ab + b^2$

$10 + 3$	$100 - 3$ (das ist 97)
$10 + 3$	$100 - 3$
$+10^2 + 10 . 3$	$+100^2 - 100 . 3$
$+ 3 . 10 + 3^2$	$- 3 . 100 + 3^2$
$+10^2 + 2.(3.10) + 3^2$	$+100^2 - 2.(100.3) + 3^2$

Das Quadrat der Zahl 97 ist 9409. Aber $100^2 - (2.300) + 3^2$ ist auch 9409. Also stimmen die gewöhnliche und die algebraische Art zu rechnen, überein. Ich habe kein Exempel von dem Quadrate der Zahl $-a-b$ gegeben, weil das Quadrat davon nach den Regeln der Multiplication (§. 62.) eben das ist, was das Quadrat von $+a+b$ ausmacht. Ihr seht also in allen Fällen, das Quadrat einer binomischen Wurzel sey das Quadrat des ersten Theils, nebst dem doppelten Producte des ersten Theils durch den andern, nebst dem Quadrate des letzten Theils.

Wenn man das Quadrat von $a + b$, nämlich $a^2 + 2ab + b^2$, oder das Quadrat von $a - b$, nämlich $a^2 - 2ab + b^2$, abermals durch die Wurzel multiplicirt, so erhält man das Cubik (§. 57.) nach folgenden Exempeln:

Die Wurzel $a + b$

Das Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$

$$a + b$$

$$+a^3 + 2a^2b + ab^2$$

$$+ba^2 + 2b^2a + b^3$$

$$+a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Die Wurzel $a - b$

Das Quadrat $a^2 - 2ab + b^2$

$$a - b$$

$$a^3 - 2a^2b + ab^2$$

$$- a^2b + 2ab^2 - b^3$$

$$+a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Die Wurzel $10 + 3 = 13$

Das Quadrat $10^2 + (2.10.3) + 3^2 = 169$

$$10 + 3 \qquad 13$$

$$10^3 + (2.10^2.3) + (10.3^2) = 1690$$

$$(3.10^2) + (2.10.3^2) + 3^3 = 507$$

$$+10^3 + (3.10^2.3) + (3.10.3^2) + 3^3 = 2197$$

Die Wurzel $13 - 3 = 10$

Das Quadrat $+13^2 - (2.13.3) + 3^2 = 100$

$$(13) - 3$$

$$+13^3 - (2.13^2.3) + (13.3^2)$$

$$-(3.13^2) + (2.13.3^2) - 3^3$$

$$+13^3 - (3.13^2.3) + (3.13.3^2) - 3^3 = 1000.$$

Also

Also ist das Cubik einer binomischen Wurzel (oder einer Zahl $a + b$ oder $a - b$)

Das Cubik des ersten Theils, oder a^3
und das Product des dreyfachen a^2 durch b
und das Product des dreyfachen a durch b^2
und das Cubik des letzten Theils, oder b^3.

Ich habe kein Exempel von dem Cubik der Wurzel $-a-b$ oder $-(a+b)$ gegeben, weil es nach den Regeln der Multiplication (§. 57.) dem Cubik der Wurzel $+a+b$, doch mit dem vorgesetzten Minuszeichen, gleich seyn muß. Ich sage, $(-a-b)^3 = (-a-b)^2 \times -a-b = (a+b)^2 \times -a-b = (a^2+2ab+b^2) \times -a-b = -a^3-2a^2b-ab^2-a^2b-2ab^2-b^3 =$ (§. 53.) $-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) = -(a+b)^3$.

§. 98.

Wenn eine Zahl aus mehr, als zweyen Theilen besteht, könnt ihr durch die Denkart so viele Theile in Eins zusammen nehmen, daß ihr sie für zweytheilicht oder für binomisch ansehen, und nach den Regeln der binomischen Zahlen behandeln dürft. Z. E. $a+b+c+d$, könnt ihr ansehen als $(a+b+c)+d$, oder als $a+(b+c+d)$, da die 3 ersten oder die 3 letzten zusammen einen Theil ausmachen. Z. E. 3567, könnt ihr ansehn, als 356 Zehner, und 7 Einer, also auch als binomisch; oder als 3 Tausender, und 567 Einer, abermals als binomisch.

§. 99.

Die nicht über 10 hinaussteigende, oder die einfachen, Wurzeln aus den Zahlen, behaltet nach folgender Tabelle.

Wurzeln.	Quadratzahlen.	Cubikzahlen.
1 —	— 1 —	— 1
2 —	— 4 —	— 8
3 —	— 9 —	— 27
4 —	— 16 —	— 64
5 —	— 25 —	— 125
6 —	— 36 —	— 216
7 —	— 49 —	— 343
8 —	— 64 —	— 512
9 —	— 81 —	— 729
10 —	— 100 —	— 1000.

§. 100.

Wenn ihr aus einer Zahl, welche nach der Decimalregel (§. 3.) geschrieben ist, die Quadratwurzel ziehen sollt, z. E. aus 28561, welches die Quadratzahl der Wurzel 169 ist, oder aus 767376, welches die Quadratzahl der Wurzel 876 ist; so denkt euch die Quadratzahl von hinten nach vorne in Classen von 2 Zahlen getheilt, (doch die vörderste Classe kann auch eine Zahl haben). So viel als ihr alsdann Classen findet, (z. E. 2|85|61, oder 76|73|76| (also in diesen Fällen 3), so viele Theile, in Decimalordnung geschrieben, hat die Quadratwurzel. Eine jede von den Wurzeln dieser beyden

Zahlen

Zahlen also, wenn ihr die Wurzeln suchen müßtet, wäre euch als dreyzahlicht, das ist, als aus Hundertern, und wenn an der Stelle der Zehner und Einer nicht Nullen sind, auch aus Zehnern und Einern bestehend, oder als a + b + c bekannt. Denn in jeder Multiplication nach der Decimalregel, hat das Product entweder eben so viele Zahlen, als beyde Factoren zusammen, oder eine weniger. Wenn also, wie bey Entstehung der Quadratzahlen, ein Factor dem andern gleich ist, und also einer so viel Zahlen hat, als der andre: so hat das Product, oder die **Quadratzahl**, entweder doppelt so viel Zahlen, als die **Wurzel**, oder eine Zahl weniger, das ist, so viel Zahlen, als Classen von der gesagten Art in der Quadratzahl sind.

§. 101.

Wenn Zahlen in Decimalordnung geschrieben sind: so ist eine hohe Einheit in der ersten Ziffer, z. E. in der Vierzahl der Zahlreihe 498, grösser, als die Summe aller folgenden Zahlen zusammengenommen. Einhundert ist mehr als Neunzig, oder als neun Zehner und acht Einer zusammen. Daher ist klar, daß in der höchsten Stelle die größtmögliche Zahl, deren Multiplication durch sich selbst die uns vorgelegte Quadratzahl (woraus wir die Wurzel suchen sollen) nicht übersteigt, die richtige Zahl der Wurzel auf der ersten oder höchsten Stelle sey; weil, wenn wir sie um 1 verringerten, die Wurzel für die Quadratzahl zu klein werden würde. Z. E. von 767376 ist die Quadratwurzel

 876.

876. In der Stelle der Hunderter ist die Achtzahl nicht zu groß; also ist gewiß eine jede kleinere zu klein. Dieß sage ich deswegen, weil ein Unerfahrner anfangs daran zweifeln könnte, in Meynung, er könnte (gleichwie in der Division, wegen der folgenden Zahlen des Divisors) zuweilen einen kleinern ersten Wurzeltheil wählen müssen, als es anfangs nöthig zu seyn schien. Wenn man z. E. 3226 durch 89 dividirt; so scheint es, daß man anfangs 4 als den ersten Quotiententheil setzen könne, da doch der Erfolg zeigt, daß nur 3 der rechte Quotiententheil sey. So etwas, sage ich, hat man bey Aufsuchung des ersten Theils einer Quadratwurzel nicht zu besorgen, weil man nach den Multiplicationsregeln durch Verminderung der Zahl in der höchsten Stelle der Wurzel, um eine hohe Einheit (oder um 1) dem Quadrate, welches z. E. aus $(a+b+c)^2$ bestehen soll, mehr entziehen würde, als man durch Annehmung der größten Zahlen in der Stelle b und c ihm geben könnte.

§. 102.

Nun kann ich die Kunst erklären, aus der Quadratzahl die Quadratwurzel in Zahlen, die nach der Decimalordnung geschrieben sind, zu finden, z. E. aus der Quadratzahl 767376 die Quadratwurzel 876.

Stellt euch die Quadratzahl, abgetheilt in die gehörige Classen (§. 100.) und folglich auch die Anzahl der nach Decimalordnung auf einander folgenden

den Wurzeltheile vor. Z. E. 76|73|76; folglich die Wurzel in diesem Falle als a + b + c. Alsdann versteht ihr folgende Regel: **Eine Quadratzahl, deren Wurzel vielzahlicht ist, und z. E. aus a + b + c u. s. w. besteht, wird erschöpft**

durch a^2, welches nach der Decimalregel die Höhe der ersten Classe hat, (§. 3.)

durch $2ab$, durch b^2, durch $2(a+b)c$, durch c^2, u. s. w.	von welchen Producten ein jedes zunächstfolgende auch die nächstfolgende niedrigere Höhe hat, als das vorige.

Nun zum Beweise meiner Regel: Das erste Product ist a^2; folglich das erste, andre und dritte zusammen ist $(a+b)^2$, welches ich der Kürze halber A^2 nennen will. Folglich sind die beyden letzten Producte $2Ac + c^2$. Also sind alle 5 Producte zusammen $A^2 + 2Ac + c^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = (a+b+c)^2$. Daß aber die Höhen der Producte in der Decimalordnung so auf einander folgen, wie gesagt ist, erhellt daher, weil das nächstfolgende Product immer aus 2 Factoren erwächst, die zusammen eine angehängte Nulle weniger haben, als die beyden Factoren des höhern Products. Z. E. wenn a zwey Nullen, und folglich a^2 4 Nullen hat; so hat b nur eine Nulle, und folglich $2ab$ nur 3 Nullen, weil b um einen Grad niedriger steht, als a; folglich hat b^2 nur 2 Nullen; $2(a+b)c$ nur eine Nulle, und c^2 gar keine, wenn c die letzte Zahl der Wurzel ist.

Also ist die Formel, Quadratwurzeln zu suchen, folgende;

1) Sucht a, den ersten Theil der Wurzel, durch Hülfe der Tabelle (§. 99.) alsdann sucht den Rest der Quadratzahl nach Subtraction des a^2 von der ganzen Quadratzahl.

2) Sucht b, den zweyten Theil der Wurzel, so daß $2ab + b^2$ dem ersten Reste so nahe komme als möglich, und sucht den Rest des ersten Restes durch Subtraction des $2ab + b^2$.

3) Sucht c, den dritten Theil der Wurzel, so daß $(2(a+b)c) + c^2$ dem ganzen Reste so nahe komme, als möglich, und sucht den Rest des zweyten Restes durch Subtraction des $(2(a+b)c) + c^2$, u. s. w. Z. E.

				a+b+c	
Quadratzahl	76	73	76	8 7 6	Wurzel.
a^2 =	64	00	00		
erster Rest =	12	73	76		
$2ab+b^2$ =	11	69	00		
zweyter Rest =	1	04	76		
$(2(a+b)c)+c^2$ =	1	04	76		
dritter Rest =	0				

Diese Formel ist nur von der folgenden darinnen verschieden, daß man auch die Hülfszahlen schreibt, um die Wurzeltheile bequem zu finden, und

und die zusammengesetzten Producte zu machen. Zum Exempel:

```
 76 | 73 | 76 | 876
 64 | 00 | 00 |
----------------
 12 | 73 | 76
 (1 |  6)
(11 | 20 | 00)
    |(49 | 00)
----------------
 11 | 69 | 00
----------------
  1 | 04 | 76
    |(17 |  4)
 (1 | 04 | 40)
    |    | (36)
----------------
  1 0476
```

§. 103.

Die Zahlen 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, und sehr viele andre, haben keine solche Quadratwurzeln, welche Totalzahlen sind, welches theils aus der Tabelle erhellet (§. 99.) theils daraus begreiflich ist, daß, wenn die Wurzel um 1 vergrössert wird, die Quadratzahl um viele Einheiten anwächst, und daß also alle Totalzahlen, welche zwischen der Quadratzahl der ersten kleinern, und der Quadratzahl der andern grössern Quadratwurzel sind, keine Quadratwurzeln unter den Totalzahlen haben. Z. E. 10^2 ist 100. Und 11^2 ist schon 121. Also die Zahlen von 101 bis 120 haben unter den Totalzahlen keine Quadratwurzeln.

Dieselben Totalzahlen aber haben auch gar keine genau angemeßne Quadratwurzeln, weder unter den Brüchen, als welches an sich klar ist, noch unter den vermischten Zahlen. Denn auch das Quadrat einer vermischten Zahl kann keine Totalzahl seyn: z. E. weil für die Zahl 14, die Zahl 3 als Wurzel zu klein, 4 aber zu groß ist; so giebt es zwischen 3 und 4 auch keine vermischte Zahl, welche, durch sich selbst multiplicirt, 14 ausmachte, und also zur abgemeßnen Quadratwurzel der Zahl 14 geschickt wäre. Der Beweis ist folgender: Es ist eine vermischte Zahl, oder $\left(a + \frac{b}{c}\right)^2 = a^2 + \frac{2ab}{c} + \frac{b^2}{c^2}$. (§. 79, 57.) Das Ganze ist keine Totalzahl, wenn die Summe der beyden letzten Theile, ich meyne, wenn $\frac{2ab}{c} + \frac{b^2}{c^2}$ keine Totalzahl ist. Diese Summe aber ist keine Totalzahl, wenn der erste Theil $\frac{2ab}{c}$ eine Totalzahl ist, weil alsdann der Bruch $\frac{b^2}{c^2}$ übrig bleibt. Wenn aber $\frac{2ab}{c}$ keine Totalzahl, sondern mit einem Bruche vermischt ist, so bleibt nach der Division des Zählers durch den Nenner ein Bruch $\frac{y}{c}$ übrig, in welchem der Zähler kleiner, als der Nenner seyn muß. Daher ist die Totalität des Ganzen nur noch unter der einzigen Bedingung zu erwarten, wenn die

beyden

beyden ächten Brüche $\frac{y}{c}$ und $\frac{b^2}{c^2}$ zusammen die Totalzahl 1 werden können. Dieses aber ist nicht möglich. Denn $\frac{y}{c} + \frac{b^2}{c^2}$ ist $= \frac{yc + b^2}{c^2}$. Sollte nun dieser Bruch die Einheit, oder 1 seyn; so müßte der Nenner dem Zähler gleichen; das ist, so müßte seyn $yc + b^2 = c^2$, und $y + \frac{b^2}{c} = c$. Da nun hier lauter Totalzahlen vorkommen; so müßte b^2 durch c rein aufgehen. Aber das kann in keinem Falle geschehn, da voraus gesetzt wird, daß $\frac{b}{c}$ ein ächter Bruch war, dessen Zähler und Nenner sich einander nicht angemessen sind. Denn alsdann kann auch das Quadrat des Zählers dem Nenner nicht angemessen seyn. Daher ist in allen Fällen unmöglich, daß wenn eine Totalzahl unter den Totalzahlen ihre genau angemeßne Quadratwurzel nicht hat, für dieselbe Zahl eine genau angemeßne Quadratwurzel gefunden werde.

§. 104.

Also giebt es Zahlen, die keine genau angemeßne Quadratwurzeln haben. Man kann auf eben diese Art einsehen, daß für viele Zahlen keine genau angemeßne dritte und vierte Wurzeln (§. 57.) gefunden werden. Z. E. die Cubikwurzel von 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, u. s. w. sind unerfindlich. Und überhaupt, wenn eine Totalzahl

talzahl ihre Wurzel (es sey welche Wurzel es wolle) unter den Totalzahlen nicht hat; so kann man ihre genau angemeßne Wurzel auch nicht finden.

Eine nicht genau erfindliche Wurzel aber heißt eine Irrationalzahl. (§. 79.) Z. E. $\sqrt[2]{2}$, $\sqrt[2]{3}$, $\sqrt[2]{5}$, oder $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{9}$, u. s. w.

§. 105.

Es sey für die Totalzahl T, die Totalzahl a, als Wurzel zu klein, und a + 1 als Wurzel zu groß, (gleichwie für 14 die Wurzel 3 zu klein, die Wurzel 4 zu groß ist,) es sey folglich $\sqrt[2]{T}$ eine Irrationalzahl (§. 104): so kann man doch der Zahl a einen Bruch $\frac{b}{c}$ von der Art beyfügen, daß $\left(a + \frac{b}{c}\right)^2$ nicht merklich von der Quadratzahl T verschieden bleibt. Für diesen Bruch $\frac{b}{c}$ kann man auch (§. 48.) sich Decimalbrüche vorstellen. Das Mittel aber, für den Bruch $\frac{b}{c}$ die rechten Decimalbrüche (z, h, t,) in den Stellen der Zehnthel, Hunderttheil und Tausendthel zu finden, ist folgendes:

1) Wählt, wie genau ihr rechnen, wie viel nach der Ordnung abnehmende Decimalbrüche ihr suchen wollt. (§. 46.)

2)

2) Alsdann setzt doppelt so viel Nullen zu T (oder zu der Quadratzahl) als ihr Stellen gewählt habt.

3) Zieht die Quadratwurzel aus dem in dem gesagten Grade verzehnfachten T, und vernachlässigt den alsdann noch bleibenden Rest, als eine Kleinigkeit.

4) In der gefundnen Wurzel aber schreibt als Decimalbrüche diejenigen Theile derselben, welche ihr durch den Zusatz jener Nullen-Paare gefunden habt, oder setzt den Strich, (§. 45.) der die Einer von den Decimalbrüchen absondert, vor halb so vielen Ziffern, als ihr Nullen zu T zugesetzt habt, das ist, vor so vielen Ziffern, als ihr Stellen für Decimalbrüche gewählt habt. So ist dieses die Wurzel, so genau, als ihr sie finden wolltet.

Beweis. Es heisse c^2 die hohe Einheit, wodurch ihr T, vermittelst Zusetzung der Nullen, multiplicirt habt. Ihr habt aus Tc^2 die Quadratwurzel gezogen, da ihr sie aus T ziehen solltet. Das ist, ihr habt für $\sqrt[2]{T}$, vorgängig $\sqrt[2]{Tc^2}$, oder $c\sqrt{T}$ (§. 57. No. c.) gemacht; aber ihr habt dieses wieder durch c dividirt, nämlich durch Versetzung des Striches um eben so viele Stellen, (§. 46.) als c Nullen hat, folglich habt ihr die vorgängig gefundene Wurzel $c\sqrt{T}$ durch c dividirt. Also habt ihr, welches ihr suchtet, $\sqrt{T}$ richtig erhalten.

Es

Es wird z. E. $\sqrt{14}$ auf folgende Art gefunden:

```
14 | 00 | 00 | 00 | 3,742 = 3 742/1000 beynahe.
 9 | 00 | 00 | 00 |
-----------------
 5 | 00 | 00 | 00
   |(6) |    |
 4 | 69 | 00 | 00
-----------------
   | 31 | 00 | 00
   | (7 | 4) |
   | 29 | 76 | 00
-----------------
   |  1 | 24 | 00
   |    |(64 | 8)  u. s. w.
```

Macht man nun $(3\frac{742}{1000})^2$ oder $\frac{3742}{1000} \times \frac{3742}{1000}$, so kömmt $\frac{14002564}{1000000} = 14 + \frac{2564}{1000000} = 14\frac{2\frac{1}{2}}{14000}$, ein kleiner Ueberschuß über 14.

Eben dieses sieht man, wenn man $(3,742)^2$ macht: z. E.

```
      3,742
      3,742
     ------
      7484
    14968
   26194
  11226
  ---------
  14,002564
```

§. 106.

Euch ist schon bekannt, (§. 57. No. d.) daß ihr, um die Quadratwurzel aus einem Bruche zu haben, die Quadratwurzel des Zäh-

lers,

ners, als den Zähler, und die Wurzel des Nenners, als den Nenner zu einem neuen Bruche nehmen müßt, welcher die Quadratwurzel des alten ist.

Z. E. $\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$.

Wenn ihr aber die Quadratwurzel aus einer mit Decimalbrüchen vermischten Zahl, (z. E. aus 45,621, oder aus 4, 1, oder aus 0,023) ziehn sollt; so setzt so viele Nullen hinten an, als ihr wollt, (desto mehr, je genauer ihr die Wurzel verlangt). Aber mit den zugesetzten Nullen muß die Anzahl der hinter dem Striche stehenden Ziffern nicht ungerade bleiben, (wenn sie es ist,) sondern gerade werden. Alsdann behandelt vorgängig diese Zahlreihe, als wenn sie Totalzahlen bedeutete, und suchet die vorgängige Wurzel. Z. E.

für $\sqrt{45,621}$ suchet etwa $\sqrt{45621000}$,
und für $\sqrt{4,1}$ suchet etwa $\sqrt{41000}$,
oder setzt mehr Nullen paarweise hinzu.

Wenn ihr nun die vorgängige (noch nicht berichtigte) Wurzel gefunden habt: so bedenkt, daß ihr die wahre euch vorgegebene Quadratzahl, vor Ausziehung der Wurzel so oft durch 100 (das ist, durch eine solche Potenz der Hundertzahl) multiplicirt habt, (§. 46. 47.) als, mit denen von euch zugesetzten Nullen, Ziffernpaare hinter dem Striche (oder hinter der wahren Einer-Stelle) für Totalzahlen angesehn und behandelt wurden, da sie doch Decimalbrüche waren. Wenn aber die Quadratzahl durch 100 multiplicirt, und alsdann die Wurzel gesucht wird; so ist die Wurzel durch 10 multiplicirt.

rtplicirt. Denn $\sqrt[2]{A \times 100} = \sqrt[2]{A}\ \sqrt[2]{100} = \sqrt[2]{A} \times 10 = 10 \sqrt[2]{A}$. Folglich ist eure vorgängig gefundene Wurzel die, nach der Anzahl jener Ziffernpaare, im gewissen Grade verzehnfachte wahre Wurzel. Verzehntheilt also die vorgängig gefundene Wurzel, in eben demselben Grade; so habt ihr (§. 29.) die wahre Wurzel. Diese Verzehntheilung aber geschicht (§. 46, 47.) wenn ihr den Strich in der vorgängig gefundenen Wurzel vor so vielen Ziffern setzt, als, vor Ausziehung der Wurzel, Ziffernpaare, die Decimalbrüche waren, wie Totalzahlen behandelt wurden.

§. 107.

Das Cubik von 10 + 2, oder von 12, ist 1728, nämlich 12 mal 12mal 12. In der Wurzel 10 + 2 heisse ich 10 = a, und 2 = b. Erinnert euch (§. 97.) daß das Cubik einer binomischen Wurzel, oder daß $(a + b)^3$ folgende Producte enthalte:

erstlich a^3	=	10 . 10 . 10	=	1000
zweytens $3a^2b$	=	3 . (10 . 10) . 2	=	600
drittens $3ab^2$	=	3 . 10 . (2 . 2)	=	120
viertens b^3	=	2 . 2 . 2	=	8
Summe $(a+b)^3$	=	$(12)^3$	=	1728

Folglich wenn die Wurzel dreyzahlicht ist, oder aus a + b + c besteht, (z. E. 876, dessen Cubik 672221376 ausmacht) so sind in der Cubikzahl enthalten folgende Producte, durch deren Subtraction es erschöpft wird:

erstlich

erstlich, a^3 . .	$(800)^3$	=	512000000
zweytens $3a^2b$	$3.(800)^2.70$	=	134400000
drittens $3ab^2$.	$3.800.70^2$	=	11760000
viertens b^3 . . .	70^3	=	343000
fünftens $3(a+b)^2c$	$3.(870)^2.6$	=	13624200
sechstens $3(a+b)c^2$	$3.(870).6^2$	=	93960
siebendens c^3 . . .	6^3	= .	216
Sume $(a+b+c)^3$	Sume $(876)^3$	=	672221376

Denn die 4 ersten Producte sind $(a+b)^3$ nach der Regel (§. 97.). Also, wenn ihr $a+b$ zusammen als A ansehet, und die 4 ersten Producte als ein einziges, nämlich als A^3 betrachtet: so ist nach derselben Regel klar, daß das aus den 4 ersten zusammengesetzte Product nebst den 3 letzten, zusammen $(A+c)^3$ und also $(a+b+c)^3$ ausmache.

Wäre die Wurzel $(a+b+c+d)$; so käme zur Cubikzahl noch hinzu

$3\,(a+b+c)^2\,d$

$3\,(a+b+c)\,d^2$

und d^3. Also wißt ihr die allgemeine Regel, was für Producte in der Cubikzahl sind, wenn die Wurzel viele Theile hat.

§. 108.

Sind nun die Cubikzahlen und Wurzeln in Decimalordnung geschrieben; so ist einem jeden, der multipliciren kann, besonders wenn er die über die Quadratwurzeln und Quadratzahlen angestellten Betrachtungen (§. 81, 82, 83) genutzt hat, ohne weiter Beweis klar, daß von den, in der Cubik-

zahl enthaltnen und kurz vorher (§. 88.) angeführten, Producten, das vorhergehende allezeit um einen Grad höher (folglich um eine Stelle weiter nach der linken Hand) stehe oder sich endige, als das unmittelbar nachfolgende Product. Z. E. a^3 (oder $10^3 = 1000$) ist einen Grad höher, als $3a^2b$ (oder als $3 . 100^2 . 2 = 600$.) Dieses ist um einen Grad höher, als $3ab^2$ (oder $3 . 10 . 2^2 = 120$.) und so weiter.

Ferner ist klar, daß für jeden Wurzeltheil, der zu dem ersten Theile oder zu a hinzu kömmt, z. E. für b, für c, jedesmal 3 Stellen in der Cubikzahl seyn müssen, ausser den Stellen, welche a^3 einnimmt, (und welche seyn können

entweder eine, weil $1^3 = 1$, weil $2^3 = 8$,
oder zwey, weil $3^3 = 27$, weil $4^3 = 64$,
oder gar drey, weil $9^3 = 729$, und $8^3 = 512$).

Ich sage, für b, für c, für d, u. s. w. müssen immer 3 Ziffern hinzu kommen. Denn wenn der vorhergehende Wurzeltheil V, der nachfolgende n heißt, so muß n besetzen, erstlich die höchste seiner 3 Stellen, nämlich durch $3V^2n$; ferner die zweyte seiner Stellen durch $3Vn^2$, und die dritte durch n^3. Also, wenn ihr die Cubikzahl in Decimalordnung setzt, so seyd ihr sicher, daß die Wurzel so viel Theile habe, als Classen von 3 Zahlen von hinten nach vorne hin in der Cubikzahl gemacht werden können, von welchen 3 Classen aber die letzte, oder höchste, entweder aus einer, oder aus 2, oder aus 3 Ziffern bestehen kann.

§. 109.

§. 109.

Um also die Cubikwurzel zu finden, thut Folgendes: erstlich sucht den ersten Theil a, nach der Tabelle (§. 80.) durch Betrachtung der ersten Zifferncласse in eurer Cubikzahl; zweytens schreibt den Rest der Cubikzahl N^3 nach Abzug des a^3; drittens sucht b, den zweyten Theil der Wurzel, so daß $3a^2b$, und $3ab^2$, und b^3, für die 3 Zahlen der zweyten Zifferncласse nicht zu groß sind, und ihnen so nahe als möglich kommen; viertens schreibt den neuen Rest, nach Subtraction dieser Producte; fünftens sucht c, und d, und e, (u. s. w.) wie ihr b gesucht habt, aber jedesmal in den 3 Zahlen der folgenden Zifferncласse. Also sucht $\sqrt[3]{672221376}$:

					Wurz.
Ganze Cubikzahl	=	672	221	376	876
$a^3 = 8^3$	=	512	000	000	a,b,c
Rest	=	160	221	371	
		(19	2)		
		(134	4)		
		(11	76)		
			(343)		
$3a^2b+3ab^2+b^3$	=	146	503	000	
Rest	=	13	718	376	
		(2	270	7)	
		(13	624	2)	
			(93	96)	
				(216)	
$3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$	=	13	718	376	
Rest	=	0			

§. 110.

Aber höchst wenige unter den Zahlen haben genau angemeßne Cubikwurzeln. Um also, wie bey Quadratwurzeln (§. 105.) einige, und zwar die rechten, **Decimalbrüche dem gefundenen Totaltheile der Wurzel zusetzen zu können**, besetzt hinter dem Reste (auf einmal oder nach und nach) so viel Classen von 3 Zifferstellen mit Nullen, als ihr wollt; desto mehr Classen nämlich, je mehr euch an der genauen Richtigkeit der Wurzel gelegen ist. Setzt alsdann das Suchen der Wurzeltheile fort, wie zuvor; aber bedenkt, daß die so aufs Neue gefundnen Theile nicht Totalzahlen sondern Decimalbrüche sind. Denn durch den Zusatz von drey Nullen, so oft es geschehen ist, habt ihr die Cubikzahl N^3, jedesmal durch 1000 multiplicirt, folglich, wenn ihr z. E. 4 Classen, jede von 3, mit solchen Nullen besetzt habt; so habt ihr N^3 durch $1000 \times 1000 \times 1000 \times 1000$ multiplicirt, und anstatt $\sqrt[3]{N^3}$ zu suchen, habt ihr gesucht $\sqrt[3]{N^3 \times 1000 \times 1000 \times 1000 \times 1000}$, das ist, (§. 57. No. c.) $\sqrt[3]{N^3}\ \sqrt[3]{1000}\ \sqrt[3]{0000}\ \sqrt[3]{1000}\ \sqrt[3]{1000}$. Ihr habt also gefunden (weil $\sqrt[3]{1000} = 10$) $10 \times 10 \times 10 \times 10\ \sqrt[3]{N^3}$. Weil ihr aber nur $\sqrt[3]{N^3}$ wolltet; so müßt ihr das Gefundene dividiren durch $10 \times 10 \times 10 \times 10$, das ist, die Einer-Stelle oder den Strich (§. 46.) um 4 Stellen nach der **linken Hand versetzen**, oder, welches einerley ist, ihr

ihr müßt die Wurzeltheile, welche ihr durch den Zusatz solcher Nullenclassen findet, als Decimalbrüche ansehn. Z. E. Ihr sucht $\sqrt[3]{3}$. So setzt

	3	000	000	$1{,}44 = 1\frac{44}{100}$, nebst noch Tausendtheln, und kleinern Decimalbrüchen, wenn ihr sie suchen wollt.
$a^3 =$	1			
Rest =	2	000	000	
$3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$	1	744	000	
$3(a+b)^2c$		256	000	= Rest.
$+3(a+b)c^2 + c^3 =$		241	984	
Noch ein Rest =		14	016	

§. 111.

Es ist schon bekannt, daß wenn ihr die Cubikwurzel eines Bruchs verlangt, es ein Bruch sey, (§. 57. No. d.) dessen Zähler die Cubikwurzel des Zählers des alten Bruchs, und dessen Nenner die Cubikwurzel des Nenners des alten Bruchs ist.

Z. E. $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}$.

Wollt ihr die Cubikwurzel einer Zahl, welche schon Decimalbrüche bey sich hat. Z. E. 137,046, oder welche bloß aus Decimalbrüchen besteht, z. E. 0,5432; so setzt hinten so viel Nullen zu, als ihr wollt, doch so, daß die hinter dem Striche stehenden Ziffern mit den zugesetzten Nullen zusammen in lauter vollständige Classen von 3 Ziffern abgetheilt werden können. Alsdann ver-

fahrt anfangs so, als wenn eure Cubikzahl eine reine Totalzahl wäre. Aber von der vorgängig so gefundnen Wurzel macht, durch Setzung des Strichs, so viele Ziffern zu Decimalbrüchen, als Zifferclassen (jede von 3) in der von euch veränderten Cubikzahl hinter dem Striche stunden, und also Decimalbrüche waren. Denn so oft als es die Anzahl dieser Classen anzeigt, habt ihr die wahre Cubikzahl durch 1000 multiplicirt, und folglich habt ihr für $\sqrt[3]{N^3}$ vorgängig gefunden $\sqrt[3]{1000}\,\sqrt[3]{1000}$ (u. s. w.) $\sqrt[3]{N^3}$, das ist 10×10 (u. s. w.) $\times \sqrt[3]{N^3}$; folglich müßt ihr das Gefundene wieder eben so viel mal verzehntheln, und also eben so viel Ziffern der gefundenen Wurzel zu Decimalbrüchen machen.

IX.

Von arithmetischer Proportion und Zahlreihe.

§. 112.

Zuweilen nennt man den Unterschied u, den eine Zahl a giebt, wenn man b davon subtrahirt, das arithmetische Verhältniß der Zahl a, zur Zahl b. Z. E. das arithmetische Verhältniß der 12 zu 8, oder 12 — 8 ist 4, und das Gegenverhältniß der 8 zu 12, oder 8 — 12 ist — 4. Wenn nun in zweyen Paaren beyde mal die größte, oder beyde mal die kleinste Zahl voransteht, und alsdann die

die Verhältnisse in dem ersten Paare und dem andern Paare gleich sind, wie $7 - 3 = 9 - 5$, (oder $a - b = c - d$,) so nennt man diese Ordnung der Zahlen a, b, c, d, oder $a - b = c - d$, eine **arithmetische Proportion.** In dieser Proportion herrscht unter beyden Paaren ein gleicher Unterschied, oder ein gleiches u. Ich nenne aber u den Unterschied der grössern und kleinern Zahl in dem Proportionalpaare. Z. E. In der Proportion $7 - 10 = 17 - 20$ ist u die Zahl 3.

Es ist also klar, daß die Summe der äussersten Glieder der Summe der mittelsten Glieder, oder daß $a + d$ dem $b + c$ gleich sey. Denn um wie viel das eine Mittelglied grösser ist, als das eine Aussenglied, um eben so viel ist das andre Mittelglied kleiner, als das andre Aussenglied. Also z. E. in **zunehmender Ordnung** (wie in $7 - 9 = 11 - 13$) ist $(a + u) = b$ und $(c + u) = d$. Also $(a + d) = a + (c + u) = (a + u) + c = b + c$. Z. E. $7 + 13 = 9 + 11$. Und in **abnehmender Ordnung** (z. E. in $9 - 7 = 13 - 11$) ist $a = b + u$ und $c = d + u$. Folglich ist $a + d = (b + u) + d = b + (u + d) = b + c$. Z. E. Abermals in $9 - 7 = 13 - 11$ ist $9 + 11 = 7 + 13$.

§. 113.

Wenn unter einer Menge von neben einander stehenden Zahlen einerley u oder Unterschied zwischen jedem vorhergehenden und folgenden Gliede ist; so

 nennt

nennt man die Reihe eine **arithmetische Reihe oder Progression.** Und zwar

zunehmend, als 1, 2, 3, 4, oder 3, 5, 7, 9,
oder abnehmend, als 3, 4, 2, oder 33, 22, 11.

So auch in Brüchen, $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, oder $2\frac{1}{2}$, 2, $1\frac{1}{2}$, 1.

Wenn man also u, oder den Unterschied kennt, und weis, ob die Reihe abnehmend oder zunehmend seyn soll, kann man aus einem Gliede eine so lange Reihe machen, als verlangt wird. Z. E. ein Glied soll seyn 5, aber u sey 2; so ist die zunehmende Reihe 5, 7, 9, 11, u. s. w. die abnehmende aber 5, 3, 1, — 1 — 3 — 5 u. s. w.

Wenn man zwey unmittelbar neben einander stehende Glieder sieht; so weiß man, nach welcher Seite die Reihe abnehmend und zunehmend ist; man kennt auch u, nämlich den Unterschied des grössern und kleinern Gliedes. Also kann man eine solche Reihe nach Belieben auf beyden Seiten fortsetzen. Z. E. . . . . 5, 8 . . wird — 4, — 1, 2, 5, 8, 11, 14.

Wenn euch von **dreyen Gliedern in der Reihe das mittelste fehlt;** so halbirt die Summe der äussersten. Z. E. a, x, b, oder 15, x, 31. Es ist $x = (a+b):2$, oder $(15+31):2 = 23$. Denn die zunehmende Reihe ist (a) (a+u) (a+2u). Daher ist das erste und letzte Glied zusammen $a+a+2u = 2(a+u)$, folglich ist die Hälfte davon $2(a+u):2 = a+u$, oder das mittelste Glied.

Ist

Ist die Reihe abnehmend, so ist sie (b+2u) (b+u) (b). Folglich ist das erste und letzte Glied zusammen 2(b+u). Die Hälfte davon ist b + u, oder das mittelste Glied.

§. 114.

In den arithmetischen Reihen, die wir noch ferner, sie mögen abnehmend oder zunehmend seyn, betrachten wollen, sey k das kleinste Glied, g das größte, m das mittelste, welches (weil alsdann die Zahl der Glieder ungerade ist) von dem größten und kleinsten gleich weit absteht; u sey der herrschende Unterschied zwischen einem grössern und dem zunächst stehenden kleinern Gliede; endlich z, die Anzahl der Glieder in der ganzen Reihe. Z. E. Es sey die Reihe

3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19,	21,	23,
k,	a,	b,	c,	d,	m,	v,	w,	x,	y,	g.

So ist k = 3, g = 23, m = 13, u = 2, z = 11, weil 11 Glieder sind.

Ihr könnt aber diese Glieder auch ansehn, als

k,	k+u,	k+2u,	k+3u,	k+4u,	k+5u,
das 1ste,	2te,	3te,	4te,	5te,	6te,

k+6u,	k+7u,	k+8u,	k+9u,	k+10u.
7te,	8te,	9te,	10te,	11te.

No. 1.) In der arithmetischen Reihe besteht ein jedes Glied aus k und aus einem so vielfachen u, als seine Ordnungszahl (von k an zu rechnen) beträgt, weniger 1. Z. E. das sechste Glied besteht aus k + 5 u.

No. 2.) Folglich g, das größte Glied, besteht aus k, und aus einem so vielfachen u, als z, oder die Zahl der Glieder beträgt, weniger 1. Es sind hier 11 Glieder; und g ist k + 10 u.

No. 3.) Das mittelste Glied, welches m heißt, übertrifft das kleinste an Grösse in eben dem Grade, als es selbst von dem größten Gliede übertroffen wird. Denn es stehn eben so viel Glieder hinter als vor dem mittelsten Gliede. Oder g — m = m — k. Also (§. 93.) k + g = m + m. Also k + g = 2 m. Oder $m = \frac{k+g}{2}$. Oder die Summe des kleinsten und größten Gliedes ist das Doppelte des mittelsten Gliedes. Z. E. 23 + 3 (oder 26) ist 2 . 13.

No. 4.) Nun ist dasselbe Mittelglied m, auch das Mittelglied der nachbleibenden Reihe, wenn man vom kleinsten an so viel Glieder, als vom größten an, an beyden Seiten auslöscht. Z. E. in c, d, m, v, w, ist m eben sowohl das mittelste, als in der ganzen Reihe, die hinten und vorn weiter fortgesetzt war. Also ist jede Summe zweyer Glieder, davon eins so weit vom größten als das andre vom kleinsten, oder davon ein jedes gleich weit von dem mittelsten Gliede absteht, gleich dem doppelten des Mittelgliedes, und alle solche Summen in derselben Reihe sind gleich. Oder das Mittelglied ist die Hälfte einer jeden solchen Summe.

Ist

Ist aber die Zahl der Glieder gerade, z. E. sind 4, 6, 8, 10 Glieder, u. s. w. so ist kein Mittelglied; aber die Summen zweyer Glieder, davon eins so weit vom kleinsten, als das andre vom größten, absteht, sind darum doch unter einander gleich, weil das von dem größten unmittelbar folgende Glied um den Unterschied, oder um u, kleiner ist, als das größte, und weil das auf das kleinste unmittelbar folgende Glied um u grösser ist, als das kleinste. Diesen Schluß kann man bis in die innersten der Glieder fortsetzen. Also, was in solchen Paaren dem einen Gliede abgeht, wächst dem andern zu. Daher bleiben solche Summen immer gleich, nämlich gleich der Summe der beyden äußersten Glieder, oder dem $g + k$; oder dem doppelten Mittelgliede, wenn eins da wäre.

§. 115.

Folglich ist S, oder die Summe aller Glieder zusammen genommen, erstlich, wenn die Zahl der Glieder, oder Z, gerade ist, die Summe des größten und kleinsten Gliedes, so oft gesetzt, oder durch diejenige Zahl multiplicirt, welche die Anzahl der Glieder-Paare in der Reihe anzeigt. Die Anzahl der Paare aber ist in diesem Falle $\frac{1}{2}$ Z, oder die halbe Anzahl der Glieder. Folglich ist $S = \frac{(G + K)\,Z.}{2}$ Ist aber zweytens Z, oder, die Anzahl der Glieder, ungerade, so besteht die

die Summe, oder S, erstlich aus m, dem Mittelgliede, und zweytens aus den Summen aller Paare, deren 2 getrennte Glieder zu beyden Seiten von m gleich weit abstehen, und davon eine jede 2 m ausmacht. (§. 114. No. 3.) Solcher Paare sind so viele in der ganzen Reihe, als die Hälfte der um 1 verminderten Anzahl der Glieder beträgt, das ist, als $\frac{Z-1}{2}$.

Folglich ist alsdann die Summe oder $S = m + \left(\frac{Z-1}{2} . 2 m\right) = m + (Z-1) m = Z m$.

Das ist, die Summe ist alsdann das Product des Mittelgliedes durch die Zahl der Glieder. Da nun das Mittelglied allemal der Hälfte der Summe der äußersten Glieder gleich ist, (§. 95. No. 3.): **so ist es einerley, die Summe als das Product des Mittelgliedes durch die Zahl der Glieder, oder als das Product der Hälfte von der Summe der äusserſten Glieder durch die Zahl der Glieder, anzusehen.**

In der Reihe A, B, C, D, E, F, oder 12, 10, 8, 6, 4, 2, ist die Zahl der Glieder gerade, aber die Summe der beyden in der Mitte stehenden Glieder dennoch gleich dem Doppelten einer zwischen ihnen erfindlichen Zahl, (nämlich 7). Diese erfindliche Zahl m ist, $\frac{C+D}{2}$, folglich auch $\frac{A+F}{2}$.

Diese Zahl m wäre folglich auch die mittelste unter den beyden äussersten, wenn die andern Glieder fehlten. Also stelle man sich die Summe einer jeden

jeden arithmetischen Reihe vor, als ein Product der Zahl der Glieder, entweder durch die Hälfte von der Summe der äussersten Glieder, oder durch das einzige Mittelglied; kurz, als eine Summe, welche die Zahl der Glieder geben würde, wenn jedes Glied dem Mittelgliede gleich wäre. Also ist die Summe von 2, 4, 6, 8, 10, die Zahl 6 fünfmal; und die Summe von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ist die Hälfte von 4 und 5, oder die Hälfte von 9 (das ist $4\frac{1}{2}$) achtmal; oder 36.

§. 116.

In der Reihe 1, 2, 3, 4, u. s. w. ist $K = 1$. G aber, oder das größte Glied ist dem Z, oder der Zahl der Glieder gleich. Also ist (§. 115.) die Summe $S = \frac{(1+Z)Z}{2} = \frac{Z^2+Z}{2}$. Ich sage die Summe der ganzen Reihe ist die halbe, aus dem Quadrate der Gliederzahl, und aus der Gliederzahl selbst bestehende, Summe. Wenn man also k oder die Einheit, in Betrachtung einer ungeheuren Anzahl, zu welcher eine solche Summe angewachsen seyn mag, nicht rechnen, sondern auslassen will, so ist eine solche Summe (anstatt $\frac{Z^2+Z}{2}$ nur $\frac{Z^2}{2}$) oder das halbe Quadrat der Gliederzahl.

§. 117.

§. 117.

Man setze die Reihe 1, 2, 3, 4, u. s. w. fort

im ersten Absatze

1, 2, 3, 4, u.s.w. bis an das Glied g, an die Gliederzahl 1 z

im zweyten Absatze

(g+1)(g+2)(g+3)(g+4) bis p — — 2z

im dritten Absatze

(p+1)(p+2)(p+3)(p+4) bis q — — 3z

im vierten Absatze

(q+1)(q+2)(q+3)(q+4) bis r — — 4z

Die Summe des ersten Absatzes allein, (wenn man wegen ungeheurer Grösse der Zahl Z, die Einheit nicht achten darf,) ist (§. 96.) $= Z^2 : 2$; welche Grösse ich A nennen will. Also die Summe des ersten Absatzes ist A; die Summe der 2 ersten Absätze zusammen ist .... $= (2Z)^2 : 2 = 4Z^2 : 2 = 2Z^2 = 4A$; die Summe der drey ersten Absätze zusammen ist $= (3Z)^2 : 2 = 9Z^2 : 2 = 4\frac{1}{4}$ $Z^2 = 9A$; die Summe der vier Absätze zusammen ist $(4Z)^2 : 2 = 16Z^2 : 2 = 8Z^2 = 16A$. Nun nenne man den Factor, der vor dem Z steht, (z. E. die Einzahl in 1 Z, die 2 in 2 Z, die 3 in 3 Z, die 4 in 4 Z, u. s. w.) überhaupt f; so sieht man, f zeige die Anzahl der zusammengenommenen Absätze an, und die Summe solcher zusammengenommenen Absätze betrage $(fZ)^2 : 2$, oder $f^2 Z^2 : 2$. Nun bedeutet dieses f bey Ende des ersten einfachen Absatzes, 1; bey Ende des zwiefachen Absatzes, 2; bey Ende des dreyfachen Absatzes, 3; bey Ende des vierfachen Absatzes, 4. u. s. w. Also verhalten

ten sich die Summen des einfachen, zwiefachen, dreyfachen, vierfachen Absatzes (u. s. w.) in dieser Reihe, wie die Quadrate der, die Vervielfältigung der Absätze anzeigenden, Zahl.

Der einfache Absatz
giebt die Sume A, der zweyfache, der dreyfache, der achtfache
$(1^2 = 1)$mal $(2^2 = 4)$mal $(3^2 = 9)$mal $(8^2 = 64)$m.

Nun ist der Unterschied zwischen den Quadraten zweyer Zahlen k und g, davon g um 1 grösser seyn soll als k; er ist $(k+1)^2 - k^2$, oder $(k^2+2k+1)-k^2$, oder $2k+1$. Das ist, der Zusatz, welcher zu dem Quadrate einer Zahl hinzu kömmt, wenn sie um 1 vergrössert, und alsdann das Quadrat gesetzt wird, ist, wenn die Zahl k hieß, nichts anders als $2k+1$. Also verhalten sich z. E. 7^2 zu $(7+1)^2$, wie 7^2 zu $7^2+(2.7)+1$, das ist, wie 49 zu 64. Also:

Die Zahlen	0	1	2	3	4
Ihre Quadrate	0	1	4	9	16
oder	0^2	1^2	2^2	3^2	4^2
Ihre Unterschiede		1	3	5	7
oder		$(2.0,+1)$	$(2.1,+1)$	$(2.2,+1)$	$(2.3,+1)$
Die Zahlen	5	6	7	8	9
Ihre Quadrate	25	36	49	64	81
oder	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2
Ihre Untersch.	9	11	13	15	17
oder	$(2.4,+1)$	$(2.5,+1)$	$(2.6,+1)$	$(2.7,+1)$	$(2.8,+1)$

Das ist, die Unterschiede der von den Zahlen 0, 1, 2, 3, u. s. w. auf einander folgenden Quadrate

Quadrate sind die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, u. s. w.

Nun erinnere man sich wieder aus dem Vorigen dieses: durch die Summirung der Reihe 1, 2, 3, 4, und so weiter,

giebt der einfache Absatz

die Summe A,	der zweyfache,	der dreyfache,
$(1^2=1)$mal	$(2^2=4)$mal	$(3^2=9)$mal u. s. w.
das ist, (1) A	$(2^2=4)$ A	$(3^2=9)$ A u. s. w.

Also ist der Betrag eines jeden einzelnen Absatzes folgendee:

des ersten, 1 A, des zweyten, 3 A, des dritten. 5 A.

Diese bewiesenen Sätze zusammengenommen, (denn in der Naturlehre kommen sie oft vor) merkt euch, als etwas Merkwürdiges. Nämlich in der Reihe 1, 2, 3, 4, (wenn man wegen ungeheurer Grösse der ganzen Zahl die Einheit einzeln nicht rechnen darf) in dieser Reihe, sage ich, (wenn man sie in Absätze theilt, deren ein jeder so viel Glieder hat, als der erste Absatz) verhalten sich die Summen des ersten, des zweyten, des dritten Absatzes, u. s. w. wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, u. s. w. aber die Summen des einfachen, zweyfachen, dreyfachen Absatzes, u. s. w. verhalten sich wie 1^2, 2^2, 3^2, oder wie 1, 4, 9, u. s. w.

§. 118.

§. 118.

Aus Ursachen, die in die Meßkunst gehören, heißt eine jede Summe einer solchen arithmetischen Reihe, (oder Progreßion), die mit 1 anfängt, (als 1, 2, 3, oder 1, 3, 5, oder 1, 4, 7, u. s. w.) eine Polygonalzahl. Diejenige Summe also, welche eine Polygonalzahl heißt, ist die Hälfte von dem Producte des herrschenden Unterschiedes durch das Quadrat der Gliederzahl; doch (Minus, oder) weniger der Hälfte von dem Producte des um 2 verminderten Unterschiedes durch die Gliederzahl. Denn nach der allgemeinen Regel von S, oder von der Summe einer arithmetischen Reihe, ist $S = \frac{(k+g)Z}{2}$, (§. 115.) wobey k das kleinste, g das größte Glied, z aber die Anzahl der Glieder bedeutet. In der Polygonalzahl ist $k = 1$. Also $S = \left(\frac{1+g}{2}\right)Z$. Es ist aber $g = ((z-1)u) + 1 = ZU - U + 1$. (§. 114. No. 2.) Also

$$S = \frac{(1+ZU-U+1)Z}{2} = \frac{(2+ZU-U)Z}{2} = \frac{UZ^2+((2-U)Z)}{2} = \frac{UZ^2-((U-2)Z)}{2} \text{ (§. 53.)}$$

Nun nennen die Meßkünstler die Anzahl der jedesmal summirten Glieder dieser Reihe, die Seite des Vierecks, und den um 2 vergrösserten herrschenden Unterschied nennen sie die Winkelzahl. Der

bewiesene Satz ist also zureichend, alle arithmetische Fragen dieser Art aufzulösen.

§. 119.

Wie man aber eine geometrische Reihe oder Progreßion (§.96.No.7.) ausfüllen, neue Glieder zwischen setzen, oder einige der alten ausmerzen kann; so ist eben dieses auch bey arithmetischen Zahlreihen möglich.

Ihr sollt z. E. die Reihe 1 . . . 13 . . . 25 . . , welche 11 Glieder hat, ausfüllen. Sucht den Unterschied der getrennten Glieder, und dividirt ihn durch die um 1 vergrösserte Anzahl der Zwischenglieder. Der Quotient ist alsdann der Unterschied der unmittelbar auf einander folgenden Glieder. Z. E. $13 - 1 = 12$, dividirt durch 4, ist 3. Also wird die Reihe nunmehro durch Fortsetzung ausgefüllt, z. E. 1, 4, 7 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31. Denn die unterbrochne Reihe, k, $(k + u)$ $(k + 2u)$ $(k + 3u)$ $g = k + 4u$, worinnen die fehlenden Glieder eingeklammert stehen, könnt ihr euch immer in dieser eben jetzt angezeigten Form vorstellen. Da also $g = k + 4u$ ist; so ist $g - k = 4u$, und $(g - k) : 4 = u$. Dieses würde auch wahr seyn, wenn 4, wegen der grössern oder kleinern Anzahl der Zwischenglieder in eine grössere oder kleinere Zahl verwandelt würde. Eben so verfährt man, wenn man neue Glieder in gewisser Anzahl zwischen jedem Paar Glieder einer arithmetischen Reihe

zwischen=

zwischensetzen will. Gesetzt, die arithmetische Reihe 0, 5, 10, 15, 20, soll werden 0 . . 5 . . 10 . . 15 . . 20; so ist der neue Unterschied $5 - 0 : 3 = 5 : 3 = 1\frac{2}{3}$. Und die Reihe wird 0, $1\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{3}$, 5, $6\frac{2}{3}$, $8\frac{1}{3}$, 10, $11\frac{2}{3}$, $13\frac{1}{3}$, 15.

Daher ist klar, daß, wenn man zwischen jedem Paar solcher Glieder, die bleiben sollen, gleich viel Glieder ausstößt oder ausmerzt, das Bleibende gleichfalls eine arithmetische Reihe ausmache. Man stosse aus der letzten Reihe immer ein Glied aus; so bleibt die Reihe 0, $3\frac{1}{3}$, $6\frac{2}{3}$, 10, $13\frac{1}{3}$.

X.

Von Logarithmen.

§. 120.

Nun wieder zurück zur Betrachtung einer geometrischen Proportionalreihe! Dieselbe dürft ihr euch vorstellen als,

$$k, \quad \overset{1}{e}k, \quad \overset{2}{e}k, \quad \overset{3}{e}k, \quad \overset{4}{e}k, \quad \overset{5}{e}k,$$
$$2, \quad 8, \quad 32, \quad 128, \quad 512, \quad 1048,$$

worinnen e, in diesem Falle 4, der beständige Exponent oder der beständige Factor ist, durch welchen vermittelst der Multiplication jedes Glied in das zunächst folgende größre Glied, aber vermittelst der Division in das zunächst folgende kleinere Glied, verwandelt wird. Z. E. $\overset{2}{e}k$, oder 32, wird, wenn man

es durch 4 multiplicirt, das größre Glied 128; aber wenn man es durch 4 dividirt, das kleinere Glied 8.

Das k, welches durch die ganze Reihe herrscht, ist in diesem Falle 2. Denn 2 mal 4, ist 8, und 2 mal 4^2 ist 32, und 2 mal 4^3 ist 128. In andern geometrischen Reihen sind e und k andre Zahlen, z. E. in $\frac{5}{3^3}$, $\frac{5}{3^2}$, $\frac{5}{3^1}$, 5, $(5 \cdot 3^1)$ $(5 \cdot 3^2)$ ist $k = 5$, und $e = 3$.

In dieser Reihe kömmt die Einzahl, oder 1, nicht vor; aber sie kömmt vor in $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, und so weiter. In dieser letzten Reihe also ist 1 das herrschende k, und 2 der Exponente. Denn 1 multiplicirt durch 2, ist 2; aber 1 dividirt durch 2, ist $\frac{1}{2}$.

Diejenigen geometrischen Reihen nun, worinnen 1 als die beständige Zahl k herrscht, und in welcher also das auf 1 folgende größre Glied dem, in der ganzen Reihe herrschenden, Exponenten, oder dem e, gleich ist, nenne ich **merkwürdige Reihen oder Progressionen**, dergleichen sind (ausser der angeführten) $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, 27, oder $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{5}$, 1, 5, 25, u. a. m.

Diese merkwürdige Reihe (weil k) = 1, kann man sich vorstellen in der Form

$$\ldots \frac{1}{e^3}, \frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^1}, \left(\frac{e}{e} \text{ oder } 1\right) e^1, e^2, e^3 \ldots$$

Aus dem Fortgange dieser **merkwürdigen** Progressionen . . 1, e^1, e^2, e^3, e^4, e^5, u. s. w. sieht man, daß der Potenzialexponent, oder, (man merke

merke dieses Wort) der **Logarithmus** eines jeden Gliedes, (das ist, die über ihm klein geschriebene Zahl) bey jeder Stelle in zunehmender Ordnung um 1 zunehme, in abnehmender Ordnung aber um 1 abnehme, z. E. das auf e^2 folgende größre Glied ist e^3, das auf e^2 folgende kleinere Glied ist e^1.

Wenn nun die Reihe, noch weiter als bis e, in abnehmender Ordnung fortgesetzt werden soll, und wenn man die Glieder immer durch e vorstellen will; so müssen die Logarithmen seyn, wie folget:

e^{-4}, e^{-3}, e^{-2}, e^{-1}, e^0, e^1, e^2, e^3, e^4, u. s. w.

diese bedeuten, wenn $e = 2$ ist,

$\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16.

Um den wichtigen Begriff von einem Logarithmus genau abzumessen, muß ich sagen: 1) Das Wort Logarithmus bedeutet einen Verhältniß-Zähler, oder einen Zähler der Verhältnisse. 2) In einer geometrischen Reihe heißt das Verhältniß des grössern Gliedes g, zum nächstfolgenden kleinern Gliede k, das **einfache Verhältniß**; aber das Verhältniß des g zum zweyten kleinern Gliede heißt das **doppelte Verhältniß**; zum dritten kleinern Gliede das **dreyfache Verhältniß**, u. s. w. Z. E. in 4, 12, 36, 108, hat 12 zu 4, 36 zu 12, 108 zu 36 das einfache Verhältniß; 108 zu 12 das doppelte; 108 zu 4 das dreyfache. Ein doppeltes und dreyfaches Verhältniß aber, wenn das einfache a : b oder c ist, heißt nicht ein doppelt oder dreymal so grosses, sondern ein **doppelt** oder **dreymal so hohes**,

nicht 2c, 3c, sondern c^2, c^3, u. s. w. 3) Ein Logarithmus also bezieht sich auf zwey Glieder einer geometrischen Reihe, und soll das Verhältniß des grössern Gliedes zum kleinern, wenn es einfach ist, durch 1; wenn es zweyfach ist, durch 2; wenn es dreyfach ist, durch 3, ausdrücken. 4) Wenn nun aber die geometrische Reihe zu den merkwürdigen Reihen gehört, worinnen die Zahl 1 vorkömmt, und worinnen also das Verhältniß der auf 1 unmittelbar folgenden grössern Zahl zu 1, das einfache Verhältniß ist, (z. E. $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{4}$, 1, 4, 16,) so ist die auf 1 folgende grössere Zahl selbst der Exponent des einfachen Verhältnisses, dessen Logarithmus also 1 ist. 5) Wenn man nun in einer solchen merkwürdigen Reihe, worinnen 1 vorkömmt, jedes Glied durch irgend eine Potenz von e ausdrückt, und über jedes Glied den Logarithmus seines Verhältnisses zu 1 überschreibt, (wie in ... 1, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4 ...); so heißt der über jedem Gliede stehende Logarithmus seines Verhältnisses zu 1, auch der Logarithmus dieses Gliedes. Kurz, **der Logarithmus eines Gliedes oder einer Zahl ist der Logarithmus des Verhältnisses desselben Gliedes oder derselben Zahl zu 1.** Z. E. in der Reihe

1, 10, 100, 1000, 10000,
oder 1, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4,

ist 4 deswegen der Logarithmus von 10000, oder von 10^4, weil 10 das nach 1 folgende grössere, oder Fundamental-Glied, und also auch der in der Reihe herrschende Exponent des einfachen Verhältnisses

nisses $\frac{10}{1}$ ist, und weil $\frac{10000}{1}$ oder $\frac{10^4}{1}$, das vervierfachte, das ist, das 4 mal so hohe, oder das in die 4te Potenz erhabne einfache Verhältniß $\frac{10}{1}$ ist.

Wenn das Fundamentalglied 10, und also der zu 10 gehörige Logarithmus 1 ist; so zeigt der Logarithmus jeder Zahl an, welche Potenz sie von 10 sey. Man muß aber merken, daß das Wort Potenz hier in weitläuftiger Bedeutung genommen werde. Nämlich zu den Potenzen der Zehnzahl gehören erstlich, 10^1, 10^2, 10^3, u. s. w. zweytens, 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, u. s. w. das ist, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, u. s. w. drittens, alle Wurzeln von 10, z. E. $\sqrt[2]{10}$, $\sqrt[3]{10}$, u. s. w. endlich, alle Wurzeln einer jeden Potenz von 10, z. E. $\sqrt[2]{10^3}$, $\sqrt[3]{10^4}$, u. s. w. In dieser Bedeutung ist eine jede Zahl irgend eine Potenz von 10. (Man sehe §. 63. den Zusatz.)

§. 121.

Der Logarithmus einer Zahl Z ist also der Potenziatexponent (§. 120.) derjenigen Potenz, in welcher das Fundamentalglied e, der Zahl Z gleich wird. Z. E. in der Reihe 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, oder 1, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, ist 5 der Logarithmus von 100000, weil $e = 10$, und weil $10^5 = 100000$.

Der Logarithmus eines Gliedes, welches g heißt, heisse l; so ist der Logarithmus des nächsten kleinern Gliedes $l - 1$, des nächsten grössern Gliedes aber $l + 1$. Daher ist begreiflich, daß, wenn

man dem Gliede e, welches als das größre auf 1 unmittelbar folgt, den Potenzialexponenten oder den Logarithmus 1 giebt, die Logarithmen der kleinern und grössern Glieder in derselben Reihe so auf einander folgen:

Logarithmen	—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3
Zahlen	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
zusammen	2^{-5}	2^{-4}	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3
Mit Buchst.	n^{-5}	n^{-4}	n^{-3}	n^{-2}	n^{-1}	n^0	n^1	n^2	n^3
Bedeutung	$\frac{n^0}{n^5}$	$\frac{n^0}{n^4}$	$\frac{n^0}{n^3}$	$\frac{n^0}{n^2}$	$\frac{n^0}{n^1}$	n^0	n^1	n^2	n^3
oder	$\frac{1}{n^5}$	$\frac{1}{n^4}$	$\frac{1}{n^3}$	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n^1}$	1	n^1	n^2	n^3

§. 122.

Logarithmen	—3	—2	—1	0	1	2	3
Zahlen	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
Andre Zahlen	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16	64

In der ersten Reihe Zahlen hat 4 den Logarithmus 2, in der andern aber nur 1. Also in verschiednen geometrischen Reihen kann eben dieselbe Zahl verschiedene Logarithmen haben.

So lange aber einerley e, oder einerley Zahl, die unmittelbar als die größre auf 1 in der Reihe folgen soll, das ist, einerley Fundamentalglied, festgesetzt ist: so lange ist auch der Logarithmus einer jeden Zahl festgesetzt.

Daher

Daher heißt ein besonder Logarithmensystem die Verbindung jeder Zahl mit einem gewissen bestimmten Logarithmus, vermöge der Bestimmung des Fundamentalgliedes.

Soll ein Logarithmensystem vollständig ausgearbeitet seyn, z. E. von der Zahl 1 an, bis an die Zahl 100000; so muß nach demselben System eine jede Zahl ihren Logarithmus haben, welcher anzeigt, zu welcher Potenz im weiten Verstande (§. 63. Zusatz) das Fundamentalglied (dessen Logarithmus 1 ist) gebracht werden müsse, um der Zahl 2 oder 3, oder 4 .... bis 100000, gleich zu werden.

Nach dem Zusatze §. 63, welcher hier zum Grunde gelegt werden muß, ist in einem Logarithmensystem, wenn das Fundamentalglied (dessen Logarithmus 1 ist) e heisset, jede Zahl anzusehn, als e^v, e^w, e^x, e^y, e^z, ich will sagen, als e in einer gewissen Potenz. Da nun das Product $e^z e^y = e^{z+y}$; da der Quotient $e^z : e^y = e^{z-y}$; da $(e^z)^x = e^{zx}$; und da $\sqrt[x]{e^z} = e^{z:x}$: so wird man in logarithmischen Tabellen, in welchen jede Zahl (1, 2, 3 u. s. w. 13, 14, 109 u. s. w. bis 100000) als ein e^z, oder als ein e^y vorgestellt wird, und wo den Logarithmen z oder y die Zahlen, welche e^z oder e^y sind, beygefügt stehen,

1) ohne Multiplication finden das Product zweyer Factoren e^y e^z, neben dem Logarithmus $y + z$,

2) ohne Division den Quotienten $e^z : e^y$ neben dem Logarithmus $z - y$.

3) Die Potenz $(e^z)^m$ neben dem Logarithmus zm.

4) Die Wurzel $\sqrt[m]{z^n}$ neben dem Logarithmus z : m.

Man soll z. E. das Product machen 425 . 313: so schlägt man auf den ersten und andern Factor, neben ihnen findet man ihre Logarithmen, welche ich y und z nenne, und welche anzeigen, daß $425 = e^y$, und daß $313 = e^z$. Man mache die logarithmische Summe $y + z$, welche sey $= w$, so findet man neben dem Logarithmus w, die Zahl, welche e^w, oder $e^y e^z$, oder e^{y+z}, oder das Product 425 . 313 ist.

Es ist aber wohl zu merken, daß in jedem Logarithmensystem der zu der Zahl 1 gehörige Logarithmus nothwendig 0, oder Nulle, seyn müsse. Denn da in jedem Falle $e^y e^z$ seyn soll $= e^{y+z}$; und da, wenn $e^y = 1$ ist, $e^y e^z$ nicht unterschieden ist von e^z; so muß $y + z$ seyn $= z$. folglich muß y seyn eine Nulle.

Das gewöhnliche Logarithmensystem aber, welches ich künftig überhaupt das Logarithmensystem nenne, hat zum Fundamentalgliede die Zahl 10, welche der herrschende Exponent in der Reihe ist. Daher werden

$\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10}$, 1, 10, 100, 1000, 10000, u. s. w. so bezeichnet:

10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4.

Wenn

Wenn man nicht die Zahl, sondern ihren Logarithmus anzeigen will; so setzt man ein l vor der Zahl. Z. E. l 100 ist nicht 100, sondern der zu 100 gehörige Logarithmus. Nach dem gewöhnlichen Logarithmensystem also ist

$l\,10 = 1$	$l\,1$ oder $\frac{10}{10} = 0$
$l\,100 = 2$	$l\,\frac{1}{10} = -1$
$l\,1000 = 3$	$l\,\frac{1}{100} = -2$

§. 123.

Das gewöhnliche Logarithmensystem hat also zum Grunde das Fundamentalglied 10, oder die geometrische Progession

$$\ldots \frac{1}{100}, \frac{1}{10}, 1, 10, 100, 1000 \ldots$$

Nun will ich zeigen, wie man etwa den zu jeder Zahl gehörigen Logarithmus habe finden können, um sie allesammt neben ihren Zahlen in Tabellen zu setzen.

Es mögen a und b zwey Zahlen seyn, deren Logarithmen la und lb schon bestimmt sind; m sey grösser als a, kleiner als b, und der Logarithmus lm soll bestimmt werden. Man mag sich z. E. denken a, als 1; b als 10; m als eine der Zahlen, die zwischen 1 und 10 fallen.

Wäre $m = \sqrt{ab}$; so wäre $lm = (la + lb) : 2$. Denn a sey e^y und b sey e^z; so ist $ab = e^y e^z = e^{y+z}$. Alsdann ist $la = y$, und $lb = z$, und $l\,(ab) = y + z = la + lb$. Nun ist überhaupt $\sqrt[2]{e^x}$

(was

(was x auch für ein Potenzialexponent seyn mag) $= e^{x:2}$, nämlich eine Zahl, deren Logarithmus $x:2$ ist. (§. 65. Zus.) Also ist auch der Logarithmus einer Zahl, welche $\sqrt{ab}$ oder e^{la+lb} ist, $=(la+lb):2$.

Ist m nicht $\sqrt[2]{ab}$; so sey $\sqrt[2]{ab}=c$; und sein Logarithmus $=lc$. Nun sey m nach seiner Grösse zwischen a, der kleinern, und zwischen c, der grössern Zahl: so ist m entweder $\sqrt[2]{ac}$, und lm ist folglich $(la+lc):2$: oder wenn das nicht ist; so heisse $\sqrt[2]{ac}$ die Zahl d, und ihr Logarithmus ld.

Nun sey m zwischen d der kleinern, und zwischen c der grössern Zahl. Alsdann finde man $\sqrt[2]{dc}=e$, und desselben Logarithmus, welcher ist $(ld+lc):2$, oder le. Wenn man so zu handeln fortfährt, nähert man sich immer der Zahl m, und findet endlich eine Zahl, die von m nur um ein Verächtliches unterschieden ist, die man also der Zahl m gleichschätzen, und deren Logarithmus man als lm ansehn will.

§. 124.

So suchten die ersten Erfinder des gewöhnlichen Logarithmensystems, die für 1 den Logarithmus 0, für 10 den Logarithmus 1 bestimmt hatten, die Logarithmen aller Primzahlen, (das ist solcher, die keine angemeßne Producte kleinerer Totalzahlen sind) 2, 3, 5, 7, zwischen 1 und 10: hernach auch zwischen 10 und 100, das ist, zwischen denen

Zahlen,

Zahlen, deren erster sie den Logarithmus 1, deren zweyter sie den Logarithmus 2 bestimmt hatten, und (da das Fundamentalglied 10 bestimmt war) bestimmt haben mußten. So suchten sie auch die Logarithmen der Primzahlen, zwischen 100 und 1000, deren Logarithmen 2 und 3 sind, und zwischen 1000 und 10000, deren Logarithmen 3 und 4 sind, und zwischen 10000 und 100000, deren Logarithmen 4 und 5 sind. Die Logarithmen aber der abstammenden und in kleinere Factoren zerfällbaren Zahlen bestimmten sie nach der Regel, daß der Logarithmus des Products die Summe der Logarithmen seiner Factoren ist. Der Hülfsmittel, die sie hatten, sich diese erstaunliche Arbeit in etwas zu erleichtern, will ich hier nicht erwähnen.

§. 125.

In den grössern Ausgaben der logarithmischen Tabellen, (davon die brauchbarste Ausgabe *Sherwins* mathematical Tables revised, by Gardiner, seyn soll,) stehn also die Zahlen 1, 2, 3 . . . bis 100000; in den kleinern Tabellen aber nur bis 10000, neben ihren Logarithmen. Die Logarithmen aber haben in den meisten Tabellen acht Zifferstellen, wovon nur die erste Stelle (wenn sie mit einer bedeutenden Ziffer, und nicht mit einer Nulle besetzt ist) Totaleinheiten bedeutet, die folgenden Ziffern aber Decimalbrüche anzeigen. Z. E. ein so geschriebener Logarithmus 1,0020405, würde nur bedeuten $1 + \frac{2}{1000} + \frac{4}{100000} + \frac{5}{10000000}$, das ist, etwas sehr weniges, über 1.

Nach

Nach dieser Schreibart nun ist

$l\,1 = 0,0000000$
$l\,10 = 1,0000000$
$l\,100 = 2,0000000$
$l\,1000 = 3,0000000$
$l\,10000 = 4,0000000$
$l\,100000 = 5,0000000$, u. s. w.

$l\,\frac{1}{10} = -1,0000000$
$l\,\frac{1}{100} = -2,0000000$
$l\,\frac{1}{1000} = -3,0000000$
$l\,\frac{1}{10000} = -4,0000000$
$l\,\frac{1}{100000} = -5,0000000$, u. s. w.

Oder auch

$l\,10^0 = 0,0000000$
$l\,10^1 = 1,0000000$
$l\,10^2 = 2,0000000$
$l\,10^3 = 3,0000000$, u. s. w.

$l\,10^0 = 0,0000000$
$l\,10^{-1} = -1,0000000$
$l\,10^{-2} = -2,0000000$, u. s. w.

Die erste Stelle in den Logarithmen ist die Stelle der Einer; die Ziffer, welche auf derselben steht, heißt die Characteristik, oder kürzer, der Character. Es ist aber die Characterstelle des Logarithmus aller Zahlen, die unter 10 sind, mit 0 besetzt. Also ist der Logarithmus von 4, oder $l\,4$, $= 0,6020600$.

§. 126.

§. 126.

Der Logarithmus l 102 ist, 2,0086002 = (2,0000000 + 0,0086002) = l 100 + l z. Ich verstehe unter z diejenige Zahl, welche, durch 100 multiplicirt, das Product 102 macht. Und überhaupt erstlich der Character, und zweytens die nach dem Character folgenden Decimalbrüche, sind zwey Logarithmen derjenigen beyden Factoren, welche das Product geben, dessen Logarithmus die Summe beyder Logarithmen-Theile ist.

§. 127.

Man muß auch wohl merken, daß das Minuszeichen vor dem Logarithmus, obgleich der Logarithmus selbst alsdann eine negative Zahl ist, dennoch nicht anzeige, daß der Logarithmus zu einer negativen Zahl, als Logarithmus, gehöre. Z. E. die Zahl, deren Logarithmus — 2,0000000 ist, ist $\frac{1}{100}$ oder 0,01, und also positiv. Ueberhaupt haben die negativen Zahlen, als negativ, keine Logarithmen.

§. 128.

Die leichtesten Regeln von dem Gebrauche der Logarithmen sind: (§. 122.)

1) Der Logarithmus des Products ist die Summe der Logarithmen der Factoren. Z. E. l(nz) = l n + l z, l(203.201) = l 203 + 201.

2)

2) Der Logarithmus des Quotienten ist der Unterschied des Logarithmus des Dividenden und Divisors. $l(z:n) = lz - ln$.

3) Der Logarithmus einer Potenz ist der durch den Potenzialexponenten multiplicirte Logarithmus der Zahl. Z. E. $l(z^3) = 3\,lz$.

4) Der Logarithmus einer Wurzel ist der durch den Wurzel-Exponenten dividirte Logarithmus der Zahl. Z. E. $l\sqrt[4]{z}$ oder $lz^{1:4} = (lz):4$.

§. 129.

Zwey Zahlen, die von einander nur darinnen verschieden sind, daß die eine ein Product der andern durch eine hohe Einheit, durch 10, 100, 1000; oder daß die eine ein $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ der andern ist, haben übrigens einerley Logarithmus, ausgenommen daß der Character des für das Zehnfache, Hundertfache, Tausendfache, u. s. w. gehörigen Logarithmus, so viele Einheiten mehr hat, als in wie vielstem Grade diese Zahl das Zehnfache der andern ist. Z. E. Der Logarithmus

zu 83 ist 1,9190781	zu 8,3 ist 0,9190781
zu 830 ist 2,9190781	zu 0,83 ist (−1)+9190781
zu 8300 ist 3,9190781	zu 0,083 ist (−2)+9190781
zu 83000 ist 49190781	zu 0,0083 ist (−3)+9190781.

Dies ist sehr begreiflich, weil jede Verzehnfachung einer Zahl, ihrem Logarithmus den Zusatz des Loga-

rithmus

rithmus von der Zehnzahl bringt, welcher 1,0000000 ist; und weil jede Verzehntheilung ihm diesen Logarithmus nimmt. Z. E. 380 = 38 × 10. Also l 380 = l 38 + l 10. So auch 3,8 = 38 : 10. Also l 3,8 = 38 — l 10. Aber damit diese Regel, woraus viele Bequemlichkeit entsteht, in allen Fällen wahr sey, muß nur der Character eines Logarithmus negativ werden, die dabey stehenden Decimalbrüche aber positiv bleiben. Dieses kann man allemal so einrichten. Denn gesetzt, man solle den Logarithmus l 83, welcher ist 1,9190781, in den Logarithmus l 0,83 verwandeln: so ist die neue Zahl die durch 100 dividirte alte Zahl, und der neue Logarithmus ist der Rest des alten, wenn man den l 100, oder 2, oder 2,0000000, davon subtrahirt hat. Wollte man die Decimalbrüche des Logarithmus nicht positiv behalten; so müßte man so subtrahiren: (nämlich algebraisch)

1,9190781 Hauptsumme.
2,0000000 Abzug.
— 0,0809219 Rest.

In diesem Reste ist alles negativ. Aber man kann auch so subtrahiren, nämlich nur von dem Character:

1,9190781
2,0000000
(—1,)+9190781

Dieser Regel zu Folge sind die Decimalbrüche eines Logarithmus allezeit positiv, wenn auch das Pluszeichen (+) fehlet.

§. 130.

Eine jede Zahl ist ein Product einer jeden durch einen gewissen Factor. Z. E. 12 kann durch Multiplication aus einer jeden Zahl werden, wenn man den andern Factor darnach einrichtet.

Die Zahl 13654322 besteht aus den beyden Theilen 13654000 und aus 322. Die letzte kann ich als ein Product der ersten ansehn, dessen andrer Factor ist $\frac{322}{13654000}$. Kurz, ein jeder noch so kleiner Theil einer Zahl ist ein Product des grössern Theiles. Aber der zweyte Factor richtet sich in seiner Grösse nach dem geometrischen Verhältnisse des kleinern zu dem grössern Theile.

Ein jedes $a + b$ ist gleichfalls ein Product des ersten grössern Theiles a. Der zweyte Factor dieses Products, oder der Factor f, ist allemal $1 + \frac{b}{a}$, das ist, die Einheit nebst einem Bruche. Dieser Bruch ist grösser oder kleiner, je nachdem das Verhältniß $(a+b):a$ grösser oder kleiner ist. Denn $f = (a+b):a$. Also $2\frac{(a+b)}{a} = 2f$. Oder überhaupt $\frac{m(a+b)}{a} = mf$. Dieses bleibt wahr, es mag m eine Totalzahl oder ein Bruch, ein Factor oder ein Divisor seyn, der gleichfalls (§. 39.) eine Art eines Factors ist. Diese lehren

sind

sind überhaupt nützlich, aber auch besonders in der gegenwärtigen Untersuchung von den Logarithmen.

§. 131.

Wenn nämlich eine Zahl, zu welcher ein Logarithmus gesucht wird, sehr groß, und, nach der Schreibart der Decimalordnung, sehr vielzahlichr ist, z. E. 3684213; so ist ihr Logarithmus fast gleich dem Logarithmus, den sie haben würde, wenn man eine, zwey, drey der hintersten oder niedrigsten Zahlstellen, anstatt der dastehenden Zahlen, mit Nullen besetzte. Ich sage, l 3684000 ist fast gleich l 3684213. Denn 213 hat zu 3684000 ein sehr kleines Verhältniß; also ist der Factor, der aus der Zahl 3684000 die Zahl 3684213 macht, sehr wenig über 1; er ist nur $1\frac{213}{3684000}$, das ist, nicht viel über $1\frac{2}{36840}$. Dieser Factor heisse f. Nun ist l 3684213 = l 3684000 + lf. Je kleiner nun die Zahl f ist, desto kleiner ist ihr Logarithmus, obgleich nicht in derselben Proportion. Also ist l 3684000 + lf, von l 3684000 um destoweniger verschieden, je kleiner f, und je kleiner das Verhältniß $\frac{213}{3684000}$ ist. Weil nun in sehr vielen Rechnungen ein oder etliche $\frac{1}{10000}$ oder kleinere Theile keinen wichtigen Unterschied geben; so kömmt man zum Zwecke, wenn man die Logarithmen l(a+b) (welcher la + lf ist) und den Logarithmus la für gleich annimmt.

§. 132.

Es sollen k, m, g drey Zahlen seyn, k die kleinste, m die mittelste, g die größte; aber die Zahlen selbst sollen groß, die Unterschiede in Vergleichung mit den Zahlen aber sehr klein seyn, wie 3684000 und 3684213 und 3685000. Nun denke man an ihre Logarithmen an, lk, an lm, das ist, an (lk) + d und an lg. Ich nenne (lk) + d den Logarithmus zur Zahl m, oder lm, und verstehe unter d die logarithmische Differenz, die zu lk hinzu kommen muß, um aus lk den mittlern Logarithmus lm zu machen, oder ich verstehe unter d dieses lm — lk. Ich sage, die logarithmische Differenz d, oder lm — lk, wird (obgleich nicht in genauer Proportion) desto grösser seyn, erstlich je grösser m, und je grösser folglich bey Voraussetzung der Grösse des k die Differenz m — k ist; zweytens je grösser lg — lk ist, drittens je kleiner g — k ist. Erstlich je grösser m — k ist. Denn würde bey gleichen übrigen Umständen m vergrössert; so müßte lm grösser werden, folglich auch lm — lk, folglich d. Zweytens je grösser lg — lk ist. Denn diese logarithmische Differenz wird nach einer gewissen Regel unter die Logarithmen der zwischen g und k zwischenfallenden Zahlen vertheilt; der Logarithmus m bekömmt seinen Antheil, der zu dem lk hinzugesetzt wird. Dieser Antheil ist also grösser, wenn das Ganze grösser ist. Drittens je kleiner g — k ist. Denn desto grösser ist bey übrigen gleichen Umständen das Verhältniß (m — k) zu (g — k) oder das Verhältniß der Zahlendiffe-

renzen,

renzen, woraus folgt, daß auch lm, folglich (lk) + d, folglich (da lk festgesetzt ist) d grösser werde. Also bestimmt man bey solchen Umständen, wenn lm zu suchen ist, diesen Logarithmus genauer, als durch lk, wenn man d hinzusetzt, und das d findet vermittelst der Multiplication der Differenz der mittlern und kleinern Zahl, durch die ganze Differenz der Logarithmen der kleinsten und größten Zahl; und vermittelst der Division dieses Products durch die Differenz der größten und kleinsten Zahl. Oder in einer Formel: $lm = (lk) + d$. Und $d = \frac{(m - k)(lg - lk)}{g - k}$.

Also wenn ihr mit grössern Zahlen umgeht, als wohin eure Tabellen reichen, z. E. wenn ihr den Logarithmus l 1843261 bestimmen sollt, und eure Tafeln nur bis an 10000 reichen: so erwägt, daß lm nur um d differirt von lk, das ist, von l 1843000. Also verwandelt 1) hinten so viel Zahlen in Nullen, daß die vördersten Ziffern noch in den Tabellen sind, und denkt euch 1843000 als k. 2) Vergrössert die letzte der bedeutenden Ziffern (in diesem Falle die Dreyzahl) um eine Einheit, und denkt z. E. euch die Zahl 1844000 als g. 3) Die Zahl aber, deren Logarithmus ihr sucht, denkt euch als m. 4) Nun sucht lg — lk, oder die ganze logarithmische Differenz, und setzet den Proportionalsatz:

Ganze Zahlendiff. :	Theil =	Ganze log. Diff. :	Theil
g — k	: m — k =	lg — lk	: lm — lk
1000	: 261 =	2356	: (d=615)

Es ist also d, oder der gesuchte Theil der logarithmischen Differenz = (lg — lk) (m — k) : g — k.
5) Nun endlich addirt dieses d, in unserm Falle 615, zu dem kleinern Logarithmus, das ist, zu lk, das ist in unserm Falle zu 6,2655253; so habt ihr (lk) + d, das ist, den gesuchten Logarithmus lm, in unserm Falle 6,2655868.

Wenn ihr aber zu einem für die Tafeln zu grossen Logarithmus die Zahl sucht: so setzt anstatt der obigen Proportion, welche war: g — k : m — k = lg — lk : lm — lk, dieselbe Proportion in andrer Ordnung: lg — lk : lm — lk = g — k : m — k. Alsdann findet ihr den Theil der Zahlendifferenz, vermittelst der Multiplication der ganzen Zahlendifferenz durch den Theil der logarithmischen Differenz, und vermittelst der Division durch die ganze logarithmische Differenz. Zu dieser gefundnen Zahlendifferenz, oder zu m — k, addirt die Zahl k; so habt ihr die Zahl m, welche ihr sucht, wenn ihr zu einem Logarithmus, der für eure Tabellen zu groß ist, die Zahl finden sollt. Gesetzt, ihr hättet den Logarithmus lm oder 4,9670579; sucht diesen Logarithmus, dessen Character für die Tafeln zu groß ist, unter dem kleinern Character 3; das ist, sucht 3,9670579; ihr findet ihn zwar nicht, aber

aber doch die beyden Logarithmen, zwischen welche er zwischen fällt, nämlich 3,9670329, und 3,9670797, welche zu den dabeystehenden Zahlen 9269 und 9270 gehören. Wenn ihr also den wahren Character des Logarithmus, welchen ihr anfangs hattet, nämlich 4, behaltet; so habt ihr in 4,9670329 und in 4,9670797 die Logarithmen zu den Zahlen 92690 und 92700, zwischen welche eure Zahl m, die ihr sucht, zwischen fallen muß, (weil euer Logarithmus grösser, als der erste, und kleiner, als der letzte Logarithmus ist,) und davon ihr also die erste Zahl als k, die andre als g, und ihre Logarithmen als lg und lk (der Regel halber) euch vorstellt. Sucht also lg — lk und lm — lk:

lg — lk ist 4,9670797	lm — lk ist 4,9670579
minder 4,9670329	minder 4,9670329
oder lg — lk = 468	oder lm — lk = 250

Sucht auch g — k, das ist, 92700 — 92690, das ist 10.
Nun setzt: lg — lk : lm — lk = g — k : m — k
oder 468 : 250 = 10 : m — 92690
od. (die ganze l. Diff.) : (Theil) = (die ganze Zahlendiff.) : (Theil)

Also ist das vierte Proportionalglied m — k = $5\frac{160}{468} = 5\frac{40}{117}$, oder mit Decimalbrüchen 5,34. Das war m — k. Ihr müßt also noch k addiren, um m zu finden:

$5\frac{40}{117}$	5,34
92690	oder 92690
m = $92695\frac{40}{117}$	m = 92695,34

Doch die Brüche pflegt man bey so grossen Zahlen zu vernachlässigen.

§. 133.

Weil der Zähler eines Bruchs ein Dividend, der Nenner ein Divisor, die Grösse des Bruchs aber ihr Quotient ist: so müßt ihr, **um den Logarithmus eines Bruchs zu finden**, den Logarithmus des Nenners von dem Logarithmus des Zählers (und zwar, weil der Zähler eines ächten Bruchs kleiner, als der Nenner ist, algebraisch) subtrahiren. Z. E. $l\,\frac{5}{3}$ ist $l\,5 - l\,3$. Aber $l\,\frac{3}{5}$ ist $l\,3 - l\,5 = -(l\,5 - l\,3)$, doch nach der oben (§. 129.) gegebnen Regel so, daß die Decimalbrüche des gesuchten Logarithmus positiv bleiben.

Das Minuszeichen vor einem Logarithmus zeigt euch also, daß die dazugehörige Zahl ein Bruch sey. Wollt ihr aber **zu einem solchen Logarithmus den Bruch finden**, so addirt algebraisch zu dem Logarithmus den Logarithmus einer hohen Einheit, als $l\,10$, $l\,100$, $l\,1000$, $l\,10000$, $l\,100000$, u.s.w. Diese Addition geschicht bekanntermaassen, wenn ihr den Character des Logarithmus, weil derselbe negativ ist, von dem Character des Logarithmus der hohen Einheit subtrahirt. Alsdann (wenn der Bruch b, und die hohe Einheit h heißt) habt ihr den Logarithmus $lb + lh$, oder $l(bh.)$ Hierauf sucht die Zahl bh; dividirt sie durch h; so habt ihr b, oder den Bruch. Es geschicht aber diese Division am bequemsten, weil der Divisor eine hohe Einheit ist, dadurch, daß ihr in dem Dividenden den Strich, der die Stelle der Totaleiner

bezeich-

bezeichnet, vor so vielen Ziffern setzt, als der Divisor Nullen hat. Ein Exempel wird alles erläutern.

1) Es sey zu suchen der Logarithmus $l \frac{17}{25}$. Sucht durch algebraische Subtraction $l\,17 - 25$, das ist $-1,+8325089$ das ist $= \left.\begin{matrix}1,2304489\\1,3979400\end{matrix}\right\} = l\frac{17}{25}$,

Nun sey euch hingegen gegeben der Logarithmus $lb = -1,+8325089$, ihr sollt den Bruch suchen. Addirt den Logarithmus $lb =$

$$\begin{array}{ll} -1,(+)8325089 & \text{zu} \\ 3, \quad 0000000 & = lh = l\,1000 \\ \hline 2, \quad 8325089 & \text{Summe } lb + lh \\ \text{oder} \quad l(bh.) & \end{array}$$

Die Tafel zeigt, bh sey 680. Dividirt diese Zahl durch h, oder durch 1000; so ist (bh : h) oder $b = \frac{680}{1000} = \frac{17}{25}$, oder in Decimalbrüchen 0,68.

§. 134.

Sollt ihr zu einer Zahl, die mit einem Bruche vermischt ist, (z. E. $19\frac{3}{5}$) den Logarithmus suchen; so verwandelt die vermischte Zahl in einen reinen Bruch, welcher unächt (oder größer als 1) wird, z. E. in 98 : 5, das ist, in z : n; und sucht den Logarithmus, wie zu einem Quotienten; sucht $l\,z - ln$, z. E. $l\,98 - l\,5$. Aber wie kann man zu einem Logarithmus, welcher zwischen 2 in der Tafel stehende Logarithmen fällt, und also zu einer mit einem Bruche vermischten Zahl gehört, die Zahl

$a + \frac{b}{c}$ finden: Ein Exempel sey folgendes: Die Zahl 1573651 dividirt durch 17, ist $9256\frac{11}{17}$, oder = m. Rechnet ihr durch logarithmen, (welches in solchen Fällen zwar niemand thun wird, und dessen ich nur der Lehre wegen erwähne) so findet ihr (nach §. 128, 132, 133.)

$$\begin{aligned} l\,157365 &= 5,1969081 \text{ Hauptsumme,} \\ l\,17 &= 1,2304489 \text{ Abzug,} \\ l\,m &= 3,9664592 \text{ Rest.} \end{aligned}$$

Die Zahl m, die ihr zu lm sucht, fällt in den Tafeln zwischen k und g, zwischen 9256 und 9257. Sucht die Zahlendifferenz, (nach §. 132.) aber vertausendfacht; aus der Proportion zwischen der ganzen logarithmischen Differenz lg — lk; eurer logarithmischen Differenz lm — lk; der vertausendfachten Einheit (welche ist 1000 (g — k,) oder 1000, weil g — k = 1 ist), und der vertausendfachten Zahlendifferenz, die ihr sucht, welche ist 1000(m—k). Wenn ihr nun das so Gefundene, nämlich 764, als eine Anzahl von $\frac{1}{1000}$ ansehet; das ist, wenn ihr es so zu der Totalzahl 9256 hinzuschreibt wie 9256,764; so habt ihr m, oder $a + \frac{b}{c}$, welches ihr sucht. Eben diese Regel gilt in allen Fällen.

§. 135.

Ist eure Zahl, wozu ihr den Logarithmus sucht, eine Sammlung von Decimalbrüchen, als 0,0654, oder damit vermischt, als 32,054; so betrachtet die Zahl als einen Zähler

ler eines Bruchs, von dessen Logarithmus ihr den Logarithmus des Nenners subtrahiren müßt. Es ist aber hier der Nenner die hohe Einheit, die so viel Nullen hat, als Ziffern in der Zahl hinter dem Striche stehn. Denn $0,0654 = \frac{654}{10000}$, und $32,054 = 32\frac{54}{1000} = \frac{32054}{1000}$. Also ist $l\,0,0654 = l\,654 - l\,10000$. Und $l\,32,054 = l\,32054 - l\,1000$.

§. 136.

Diejenigen, welche in der Meßkunst des Raumes, oder in der Geometrie, nicht ganz fremd sind, können sich durch Betrachtung einer Linie, welche die logarithmische heißt, die Lehre dieses Hauptstückes sehr erläutern und einprägen. (Figur 1.) Die Linie OP habe gleiche Abtheilungen, die man sich sehr nahe an einander denken muß; die daraufstehenden Querlinien haben an derselben einerley Winkel, nehmen aber an Länge so zu, daß Aa, Bb, Cc, u. s. w. in geometrischer Progression stehen. Die krumme Linie QZ, die an ihre Spitzen hingeht, heißt die **logarithmische Linie.**

No. 1.) Weil die Querlinien, die wir der Kürze halber a, b, c, d, u. s. w. nennen wollen, eine geometrische Progression oder Reihe ausmachen; so sind auch die auf einander folgenden Verhältnisse einer jeden Querlinie zu der Querlinie a, nämlich $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{d}{a}$, $\frac{e}{a}$, u. s. w. eine solche Progression. Nun nenne man das Verhältniß b : a, das

das einfache Verhältniß, oder v; so ist c : a das zweyfache, das ist, zweymal so hoch, oder v^2; und d : a das dreyfache, oder dreymal so hoch, oder v^3, u. s. w. Nun sehe man, daß über dem Buchstaben, der eine Querlinie anzeigt, die Vielfachheit oder Höhe ihres Verhältnisses zu a geschrieben, z. E. daß an der krummen Linie die Querlinien bezeichnet sind, wie a^0, b^1, c^2, d^3, e^4, u. s. w. Denn es sieht ein jeder, der die vorgetragne Lehre von den Logarithmen versteht, daß, wenn die Linien a, b, c, d, als Zahlen betrachtet werden, unter welchen a die Einheit oder 1 ist, (welches geschehen kann, weil Linien sich wie Zahlen verhalten,) daß alsdann, sage ich, der Potenzialexponent, der in a^0, b^1, c^2, d^3, u. s. w. über dem Namen einer Querlinie steht, der Logarithmus derjenigen Zahl sey, welche sich zu 1 verhält, wie die Linie, deren Name diesen Exponenten hat, zu der Linie a. Ferner sieht man, daß der Logarithmus einer jeden Zahl, welche durch irgend eine der Querlinien vorgestellt wird, sich von selbst zeige in der auf der Linie OP befindlichen Anzahl der kleinen gleichen Linien AB, BC, CD, u. s. w. welche von dem Puncte A bis an die Stelle derjenigen Querlinie da sind, die als Zahl betrachtet, und deren Logarithmus verlangt wird.

No. 2.) Nun lasse man die logarithmische Linie QZ, nebst der Grundlinie OP stehen, und richte unter einem beliebigen Winkel O die Linie OS auf, (Figur 2.) man lasse aber die Abtheilungen

AB,

AB, BC, CD, und die Querlinien a, b, c, d, nebst ihrem Namen weg. Man stelle sich ferner vor, der Theil oa der Linie OS, welche ich die erste Regellinie nennen will, sey die Zahl 1, oder gelte für dieselbe; und man wähle irgend eine andre Linie, welche, (parallel mit OS) zwischen der Grundlinie und der logarithmischen Linie irgend wo einpassen wird, zur zweyten Regellinie, oder als diejenige, deren Verhältniß zu oa das einfache heissen, oder deren mit ihr harmonirende Zahl den Logarithmus 1 haben, oder das Fundamentalglied in der geometrischen Reihe seyn soll. Wird euch alsdann eine Zahl, z. B. 8, gegeben, deren Logarithmus ihr suchen sollt: so macht eine Linie OR, so daß OR : OQ = 8 : 1. Diese Linie OR meßt auf OS ab, (welche lang gnug dazu seyn muß). Von dem Puncte R zieht (parallel mit der Grundlinie OP) die Linie Rr in die logarithmische QZ hinein: so ist sichtbar, daß, wenn ihr aus r in die Linie OP eine mit OS und mit m parallele Linie zieht, dieselbe so groß, als OR seyn werde. Diese Linie stellt euch also die Zahl 8 vor.

No. 3.) **Nun findet ihr den Logarithmus zu 8 auf folgende Art:** Meßt den Theil der Grundlinie von o, bis an die Stelle der Regellinie m. Dieser Theil ist, als Logarithmus 1, und gehört als Logarithmus zu dem Verhältnisse m : OQ, oder (weil OQ = 1) zu der Zahl m. Nun meßt auch den Theil in der Grundlinie von o bis an die Stelle der Linie r, die euch die Zahl 8 vorstellt.

vorstellt. Weil nun om, als Logarithmus 1 ist; so ist or : om diejenige Zahl, welche als Logarithmus zu der Linie r, oder zu der Zahl 8 gehört. Auf eben diese Art verfahrt bey dem Suchen des Logarithmus einer jeden Zahl, welcher desto genauer gefunden wird, je grösser om, oder die Linie ist, welche den Logarithmus 1 vorstellt, das ist, je mehr Abtheilungen diese Linie haben kann. Die Richtigkeit dieses Verfahrens ist bewiesen, wenn man bedenkt, daß die logarithmische Linie gleichsam entstanden ist durch Zusammenziehung der obern Puncte aller in geometrischer Progression stehenden Querlinien, welche zwischen der logarithmischen Linie und zwischen der Grundlinie parallel neben einander seyn können, und welche euch Zahlen vorstellen, zu welchen die Logarithmen gesucht werden. Denn sind gleich hier die übrigen Querlinien weggelassen: so behalten doch die gebliebenen ihr Verhältniß zu a, oder die gehörige Vielfachheit oder Höhe des einfachen Verhältnisses m : a. Die Zahlen, die durch die bleibenden Querlinien vorgestellt werden, behalten also auch ihre Logarithmen, welche auf der Linie OP, nach Maaße der Einheit om, können abgemessen werden.

§. 137.

No. 1.) Man kann (§. 122.) so viele Logarithmensysteme machen, als geometrische Reihen, durch Veränderung des Fundamentalgliedes, gemacht werden können; also unendlich viele.

Aber

Aber zweyer Zahlen (m und n) Logarithmen haben in dem einen Systeme kein ander Verhältniß, als in dem andern. Oder, welches einerley ist, es sind proportional die Logarithmen einer Zahl in dem ersten und andern Systeme, und die Logarithmen einer andern Zahl gleichfalls in dem ersten und andern Systeme. Es mögen die Logarithmen seyn,

nach dem einen Systeme Lm und Ln,
nach dem andern lm und ln.

Ich sage, es sey $Lm : Ln = lm : ln$, oder $Lm : lm = Ln : ln$. Denn in dem Systeme des grossen Buchstabens, dessen Logarithmen durch L bezeichnet werden, heisse das Fundamentalglied A, in dem andern Systeme aber a;

so ist $m = A^{Lm} = a^{lm}$
und $n = A^{Ln} = a^{ln}$.

Folglich sind die Logarithmen der beyden gleichen Grössen (nämlich der Grössen A^{Lm} und a^{lm}) nach einerley Systeme gleich. Nämlich

$$l(A^{Lm}) = l(a^{lm})$$

Auch ist $l(A^{Ln}) = l(a^{ln})$

Also $Lm\ lA = lm\ la$.

Und $Ln\ lA = ln\ la$. Denn der Logarithmus der Potenz einer Zahl ist das Product des Logarithmus der Zahl durch den Potenzialexponenten.

Also $Lm\ la : lm\ la = Ln\ La : ln\ la$
das ist $Lm : lm = Ln : ln$.

In

In dem Systeme L, sey das Fundamentalglied A, folglich sey $LA = 1$. Aber in dem andern Systeme l, sey $lA = b$. Alsdann heißt in Vergleichung beyder Systeme 1 der Modul des Systems L, und b der Modul des Systems l, weil, wenn man alsdann den Logarithmus einer Zahl, welche n heissen mag, von einem Systeme in das andre übersetzen will, folgende Gleichung die Regel ist: $Ln : ln = 1 : b$, nämlich wie $LA : lA$.

No. 2.) Es sey $1 + \frac{1}{n}$ der Exponent des kleinst möglichen Verhältnisses einer grössern und kleinern Zahl, die in einer geometrischen Reihe aufeinander folgen: so ist, wenn eine Zahl y heißt, die grössere $y\left(1+\frac{1}{n}\right)$ und $\frac{y}{n}$ ist der kleinste Zuwachs, den y haben kann, und den man dy, oder das Differenzial von y nennt. Alsdann sind die Logarithmen der Zahl y und der Zahl $y+dy$ diese, ly und $l(y+dy)$. Der letzte Logarithmus ist auch $l\left(y\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ weil $y+dy$ ist $y\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Folglich ist der letzte Logarithmus auch $ly + l\left(1+\frac{1}{n}\right)$ als die Summe der Logarithmen beyder Factoren. Und weil $\frac{y}{n} = dy$; folglich $\frac{1}{n} = \frac{dy}{y}$; so ist der letzte Logarithmus auch $ly + l\left(1+\frac{dy}{y}\right)$.

Der

Der letzte Theil dieser Summe, nämlich $l\left(1+\frac{dy}{y}\right)$ muß zu dem Logarithmus der Zahl y oder zu ly hinzu kommen, um daraus den Logarithmus der Zahl $y+dy$ zu machen. Daher heißt $l\left(1+\frac{dy}{y}\right)$ das Differenzial des Logarithmus ly, oder es heißt $d(ly.)$

No. 3.) Also ist jedes $d\,(ly,)$ oder jedes **logarithmische Differenzial**, oder jedes $l\left(1+\frac{dy}{y}\right)$, indem ein jedes $l\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ist, dem andern gleich, was die Zahl y, zu deren Logarithmus das Differenzial gesucht wird, auch für eine Zahl seyn mag. Und wenn ein Logarithmensystem so eingerichtet ist, daß die kleinste Zahl über 1, welche man als $1+\frac{1}{n}$ betrachten will, selbst den Bruch $\frac{1}{n}$ zum Logarithmus hat: so heißt es ein **natürlich Logarithmensystem**. Ein solches ist, in welchem die Zahl, oder das Verhältniß $\frac{1,0000001}{1}$, (oder 1,0000001, oder $1+0{,}0000001$, oder $1+\frac{1}{10000000}$, oder $1+\frac{1}{n}$) selbst den Bruch $\frac{1}{n}$ oder $\frac{1}{10000000}$, oder 0,0000001 zum Logarithmus hat. Nun ist in diesem Systeme $l\left(1+\frac{1}{n}\right)$ oder das allgemeine $d\,(ly) = \frac{1}{n} = \frac{dy}{y}$, welche Zahl man auch unter y verstehen will.

No. 4.) Nach diesem natürlichen System aber ist das Fundamentalglied (welches den Logarithmus 1 hat) die Zahl 2,71828, welche ich A nennen will, und deren Logarithmus nach dem Briggischen Systeme (dessen Tafeln wir haben) 0,432944 ist. Alles dieses kann man durch Berechnung zeigen. Nun heisse das natürliche System L, das Briggische aber l. Die Gleichung (No. 1.)

$$LA : lA = Ln : ln,$$

oder $1 : 0432944 = Ln : ln$, wird zeigen, was jedes mal zu thun sey, wenn wir den Logarithmus einer Zahl n von einem in das andre System übersetzen wollen. Nämlich bey Verwandlung des Briggischen ist:

$$Ln = \frac{ln}{0,432944} = ln : (\tfrac{432944}{1000000}) = ln \times \tfrac{1000000}{432944}$$

$$= ln \times 2,302585 \ldots$$

Hingegen ist bey Verwandlung des natürlichen $ln = Ln \times 0,432944$.

XI.

Der binomische Lehrsatz, und von einigen Reihen.

§. 138.

Zwey verschiedne Dinge, a und b, können nur zweymal versetzt werden, nämlich als ab und als ba.

Kömmt das dritte, oder c hinzu; so kann c das erste, das mittelste und das letzte seyn, und zwar

zwar sowohl in dem Falle, wenn b vor a, als wenn a vor b voransteht. Also sind 2.3 oder 6 Versetzungen unter den drey verschiedenen Dingen möglich, nämlich cab, acb, abc, und cba, bca und bac.

Eben so kann man beweisen, daß vier verschiedne Dinge, 4.3.2 oder 24 mal; und daß fünf verschiedne Dinge, 5.4.3.2 oder 120 mal versetzt werden können.

Nun nenne ich das grosse Product einer Zahl dasjenige Product, welches kömmt, wenn man dieselbe Zahl multiplicirt durch das Product aller kleiner Zahlen bis an 1. Z. E. das grosse Product der Zahl 5 ist 5.4.3.2.1. oder 120. Bey diesem Begriffe ist der Factor 1, weil er nicht multiplicirt, zwar überflüssig, aber der Regelmässigkeit wegen doch zugesetzt.

Den Begriff des grossen Products brauche ich in dieser Abhandlung oft. Daher will ich ein Zeichen dafür wählen. Es bedeutet also 5^* nicht 5, sondern 5.4.3.2.1. Und überhaupt ein besternt Zeichen, z. E. n^*, nicht n, sondern n (n — 1) (n — 2) (n — 3) u. s. w. bis n — 1 die Einheit oder 1 ist.

§. 139.

Die Dinge a, b, c, d, e, f, g, deren 7 sind, können also 7^* mal (§. 138.) versetzt werden. Aber wenn die 7 Dinge nur von zweyerley Art sind, z. E. aaaa, bbb: so entsteht durch die Vertauschung eines a mit dem andern, und eines b mit dem andern,

keine neue Gestalt dessen, was man versetzt. Wenn also nur solche Versetzungen, die eine neue Gestalt geben, in Rechnung kommen; so sind der möglichen Versetzungen dieser Dinge nicht 7^*, sondern weniger. Es sind nämlich die möglichen Versetzungen alsdann nur $\frac{7^*}{4^* 3^*}$. Denn man nenne die Anzahl der Setzungen, die bey einem vierfachen a und dreyfachen b möglich sind, S. Man nehme aus S irgend eine Setzung, z. E. baa ba ba; so könnte aus dieser und jeder andern Setzung die Anzahl 4^* Setzungen werden, wenn aaaa nicht aaaa, sondern acde wären. In diesem Falle würde die Anzahl Setzungen $4^* S$; und jede Setzung die in $4^* S$ ist, würde in 3^* andre verwandelt werden, wenn bbb nicht bbb, sondern bfg wären. Alsdann würde $4^* S$ abermals durch 3^* multiplicirt. Alsdann wäre $3^* \cdot 4^* S = 7^*$, weil $S^* = \frac{7^*}{4^* \cdot 3^*}$. Also $S = 7^* : 4^* \cdot 3^*$.

Es ist also überhaupt wahr, daß wenn die Zahl der versetzbaren Dinge Z heißt, und wenn diese Dinge nur von zweyerley Art, von der Art a und von der Art b sind, die Anzahl der in Rechnung kommenden Versetzungen ausgedrückt werde durch $\frac{Z^*}{a^* b^*}$, wobey a^* das grosse Product der Anzahl von den Dingen bedeutet, die a sind, und wobey b^* das grosse Product der Anzahl der Dinge bedeutet, die b sind.

§. 140.

§. 140.

Eine Zahl heißt binomisch, wenn sie zwey Theile hat $a + b$, als $10 + 4$, oder $a - b$, als $10 - 4$.

Man multiplicire $a + b$ bis in die vierte Potenz, und zwar so, daß wenn man das Vorige durch a multiplicirt, a vorangesetzt werde, und daß hingegen, wenn man durch b multiplicirt, b voran stehe. So bekömmt $(a + b)^4$ folgende Gestalt:

$a + b$ die Wurzel, oder die erste Potenz.

$aa + ab + ba + bb$ die andre Potenz.

$aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb$ die 3te.

$aaaa + aaab + aaba + aabb + abaa + abab + abba + abbb + baaa + baab + baba + babb + bbaa + bbab + bbba + bbbb$ die 4te.

Wir wollen diese vierte Potenz kürzer schreiben nach geschehener Addition und durch Hülfe der Exponenten. Die vierte Potenz von $a + b$, oder $(a + b)^4$ ist, (wenn man (§. 58.) die Theile recht ordnet,) $1a^4 + 4a^3 b^1 + 6a^2 b^2 + 4a^1 b^3 + 1b^4$. Und wenn man den Exponenten der Potenz, wovon die Rede ist, (in unserm Falle der vierten Potenz) Z nennt; so ist $(a + b)^4$ oder $(a + b)^z = 1a^z + 4a^{z-1} b^1 + 6a^{z-2} b^2 + 4a^{z-3} b^3 + (1b^4 = 1b^z)$.

Ein in dieser Summe unmittelbar folgender Theil aber ist von dem vorhergehenden verschieden, theils da-

durch, daß der Exponent des b um eine Einheit vergrössert, der Exponent des a aber um 1 vermindert ist; woraus folgt, daß die Summe beyder Exponenten allemal Z bleibt; theils dadurch, daß jeder Theil seinen eignen Coefficienten hat, wodurch das Product einer gewissen Potenz von a und einer gewissen Potenz von b multiplicirt werden soll. In unserm Exempel, nämlich in der vierten Potenz, folgen die Coefficienten so aufeinander:

1 4 6 4 1.

Es kommen daher alle Potenzen des a, von Z bis zu 1, und ebenfalls alle Potenzen des b, von 1 bis zu Z vor.

Sehr merkwürdig aber ist es, daß derer Producte, worinnen a in irgend einer Potenz, (z. E. in der Potenz Z — 3, als a^{z-3}) und b gleichfalls in einer gewissen Potenz (z. E. b^3) vorkömmt, allezeit (wie es der Coefficient anzeigt) so viele sind, als die Anzahl der in Rechnung kommenden Versetzungen der a und der b ist, welche laut des Vorigen (§. 139.) geschehen können. Man findet z. E. 6 a^{z-2} b^2, das ist, 6 aabb. Die Zahl der möglichen Versetzungen (weil die ganze Anzahl der Dinge hier 4, und sowohl 2 a als 2 b da sind,) ist (§. 139.) das grosse Product der Zahl 4, dividirt durch das Product, welches aus der Multiplication des grossen Products der Zahl 2, (welches nur 2.1 folglich 2 ist) durch das grosse Product eben dieser Zahl 2 erwächst. Daher ist der Coefficient 6.

Denn

Denn $(4.3.2):(2.2) = 6$. Oder nach der vorigen Schreibart (§. 138.) $4^*: 2^*. 2^* = 6$.

§. 141.

Was wir aber an der vierten Potenz der binomischen Zahl $a + b$ bemerkt haben, ist von allen Potenzen derselben wahr, welches ich jetzund erweisen will; wobey es sich von selbst versteht, daß der Beweis auch für die binomische Zahl $a - b$ gelte, weil die Potenzen dieser letzten binomischen Zahl von den Potenzen der ersten nur bloß durch die Zeichen Plus und Minus verschieden seyn können.

No. 1.) In einer jeden Potenz der Zahl $a + b$, wenn der Exponent der Potenz Z heißt, (wobey man sich die 5te, 6te oder 100te denken mag,) kommen verschiedene Producte vor, deren Factoren die Theile der Wurzel, nämlich a oder b, oder sowohl das eine als das andre sind. Es muß a^z vorkommen. Denn in der zweyten Potenz ist aa; dieses durch a multiplicirt, giebt in der dritten aaa, in der vierten a^4, u. s. w. Also muß auch b^z aus gleichem Grunde vorkommen. Ferner, in der zweyten Potenz findet man 2 ab, dieses durch a multiplicirt, giebt $2a^2b$, durch b aber giebt es $2ab^2$, u. s. w. Also kommen auch Producte vor, worinnen sowohl a als b (erhöht zu gewissen Potenzen) die Factoren sind; und zwar muß sowohl a als b, in allen Potenzen die niedriger sind, als a^z und b^z, bis a^o und b^o vor-

vorkommen. Alles dieses erhellet aus der Multiplication, wodurch die Potenzen entstehn.

No. 2.) Wenn man nun die Buchstaben a und b (ohne die Schreibart durch die Exponenten zu verkürzen) neben einander setzt; so findet man in der zweyten Potenz aa, 2ab, bb; in der dritten aaa, 3aab, 3abb, bbb. Weil nun bey Erhebung zu einer höhern Potenz immer das Vorige sowohl durch a als durch b multiplicirt wird; so ist klar, daß in allen Producten aller Potenzen so viele Buchstaben, nämlich theils a theils b, factorenförmig neben einander stehn, als der Exponent der Potenz, oder Z, Einheiten anzeigt, und daß also (wenn man die Schreibart durch die Exponenten verkürzt) die Summe der Exponenten des a und des b, mit der Zahl Z, welche der Exponent der Potenz ist, übereinkommen muß. Daher, wenn in der 8ten Potenz ein Product vorkömmt, worinnen a^3, das ist, a^{z-5} steht; so muß b^5 dabey stehen. Und eben so ist es in allen Fällen. Wenn man also die Coefficienten wegläßt, und wenn man 1 als a^0 und als b^0 betrachtet, (welches der Regel gemäß ist,) so folgen in jeder Potenz die Glieder, die Theile oder die Specialproducte in folgender Gestalt auf einander:

$$a^z b^0, a^{z-1} b^1, a^{z-2} b^2, a^{z-3} b^3, \ldots (a^{z-z} b^z = a^0 b^z$$

No. 3.) Stehn nun diese Theile oder Specialproducte regelmäßig als eine algebraische Summe geordnet: so ist (wenn man auf den Unterschied der

Coeffi-

Coefficienten fürs Erste nicht achtet) von einem vorhergehenden Theile ein zunächst folgender Theil nur dadurch verschieden, daß ein a, welches ein Factor des vorigen Theiles war, in ein b, als einen Factor des folgenden Theiles, verwandelt ist. Z. E. in der dritten Potenz folgen die Theile so:

(1) aaa, (3) aab, (3) abb, (1) bbb.

Dieses ist (nach No. 2.) durchgängig wahr. Wenn man aber (b : a) ein q nennet; so kann man auch sagen: der folgende Theil sey (weil die Coefficienten noch nicht in Betrachtung kommen) der durch q multiplicirte vorhergehende Theil. Denn (aaabb) q = (aaabb) (b : a) = aabbb. Vermittelst der Multiplication durch q wird also allemal ein a des vorigen Theiles in ein b verwandelt.

No. 4.) Weil nun aber bey Erhebung der binomischen Zahl a + b, zu irgend einer Potenz, (§. 140.) alle Gestalten entstehn, welche durch Versetzung der Buchstaben a und b (wenn ihre ganze Anzahl durch Z oder durch den Exponenten der Potenz bestimmt ist) entstehen können: so ist (§. 139.) der Coefficient eines jeden vorkommenden Theiles Z* : a* b*, wobey Z* (§. 138.) das grosse Product des Exponenten der Potenz bedeutet, wovon die Rede ist. a* aber bedeutet das grosse Product des Exponenten des a, und b* das grosse Product des Exponenten des b in demjenigen

 Theile

Theile oder Glieder, wovon die Rede ist. Es sey z. E. die Frage von der 7ten Potenz; es werde der Coefficient gesucht zu dem Theile $a^{z-4}\ b^4$, oder zu $a^3\ b^4$: so ist der Coefficient $= 7^* : 3^* . 4^*$, das ist, $5040 : 6 . 24 = 5040 : 144 = 35$.

No. 5.) Folglich kann der Coefficient des ersten Theils, worinnen gar kein b (oder nur b^0) ist, worinnen hingegen a in der Potenz z, oder als a^z, steht, nur die Einzahl, oder 1 seyn. Denn erstlich, es fällt unmittelbar in die Augen, daß aaaa . . . . nicht versetzt werden können, und zweytens (um den allgemeinen Beweis anzuwenden) der Coefficient ist hier, weil kein b in dem Theile ist, $= z^* : a^* = z^* : z^* = 1$. Denn der Exponent des a ist hier das ganze z.

No. 6.) In einem unmittelbar folgenden Theile ist (No. 2.) der Exponent des a um eine Einheit kleiner, aber der Exponent des b um eine Einheit grösser, als in dem unmittelbar vorhergehenden Theile. Wenn aber die Stammzahl, das ist diejenige, von deren grossem Producte (§. 138.) die Rede ist, um eine Einheit abnimmt; z. E. wenn anstatt 7^* nur 6^* gesetzt werden soll: so ist das neue grosse Product,

das

das, durch die vorige Stammzahl dividirte, vorige grosse Product. Z. E. 7^* muß durch 7 dividirt seyn, um 6^* zu werden. Nimmt aber die Stammzahl um 1 zu; so ist das folgende grosse Product, das, durch die um 1 vergrösserte Stammzahl multiplicirte, vorige grosse Product, z. E. 3^* muß durch 4 multiplicirt seyn, um 4^* zu werden.

No. 7.) Nun will ich, wie jeder folgende Coefficient aus dem unmittelbar vorhergehenden gefunden werden könne, auf eine Art zeigen, welche nur wegen der Menge der Grössen und Buchstaben einige Schwierigkeiten hat. Der Deutlichkeit halber also wiederhole ich, es sey

Z der Exponent der Potenz, davon die Rede ist bey der binomischen Wurzel $(a+b)^z$. Es ist also

Z^* das grosse Product (§. 138.) dieses Exponenten.

A^* das grosse Product des Exponenten, welchen der Wurzeltheil a hat, in irgend einem vorhergehendem Gliede.

a^* das grosse Product des Exponenten, welchen der Wurzeltheil a hat, in irgend einem unmittelbar nachfolgenden Gliede.

B*

B^* das grosse Product des Exponenten, welchen der Wurzeltheil b hat, in irgend einem vorhergehenden Gliede.

b^* das grosse Product des Exponenten, welchen der Wurzeltheil b hat, in irgend einem unmittelbar nachfolgenden Gliede.

G und g sind zwey Glieder der Summe, welche $(a+b)^z$ ist, und zwar G ein vorhergehendes, g ein unmittelbar nachfolgendes Glied.

C und c zwey Coefficienten, nämlich C in dem vorhergehenden, c in dem nachfolgenden Gliede.

Es sind No. 4.) schon bewiesen folgende Sätze:

$$C = \frac{Z^*}{A^* B^*} \qquad \text{Und } c = \frac{Z^*}{a^* b^*}$$

Es ist No. 6.) bewiesen der Satz:

$$a^* = \frac{A^*}{A} \qquad b^* = B^*(B+1)$$

Also $Z^* = A^* B^* C = a^* b^* c$

$$c = \frac{A^* B^* C}{a^* b^*}$$

$$c = \frac{A^* B^* C}{(A^* : A)\, B^* (B+1)}$$

c =

$$c = \frac{A^* B^* C A}{A^* B^* (B+1)}$$

$$c = C \times \frac{A}{B+1}$$

Oder in Worten: Der unmittelbar folgende Coefficient ist allemal der vorhergehende Coefficient, multiplicirt durch den Factor, welcher gefunden wird, wenn man dividirt den Exponenten des a in dem vorhergehenden Gliede, durch den um 1 vergrösserten Exponenten des b gleichfalls in dem vorhergehenden Gliede.

No. 8.) Sowohl G, das unmittelbar vorhergehende, als g, das unmittelbar nachfolgende Glied, (man sehe No. 3. und No. 4.) besteht aus zweyerley Factoren, davon die erste Art aus Potenzen der Wurzeltheile, (welche a und b sind,) und die zweyte Art in den Coefficienten besteht. Z. E. in der vierten Potenz $(a+b)^4$ hat das zweyte Glied, (welches ist $4 a^3 b^1$,) den Coefficienten 4 und die Potenzialfactoren $a^3 b^1$; und das dritte Glied, (welches ist $6 a^2 b^2$,) hat den Coefficienten 6, und die Potenzialfactoren $a^2 b^2$.

Aus

Aus den Potenzialfactoren in dem vorhergehenden Gliede werden die Potenzialfactoren des unmittelbar nachfolgenden Gliedes gemacht bloß vermittelst der Multiplication durch q, oder durch das Verhältniß des zweyten zum ersten Wurzeltheile, das ist, durch $\frac{b}{a}$, (man sehe No. 3.). Und nach No. 7.) wird der folgende Coefficient c aus dem vorhergehenden C gemacht vermittelst der Multiplication durch den Bruch $\frac{A}{B+1}$, dessen Zähler der Exponent des Wurzeltheils a in dem vorhergehenden Gliede ist, und dessen Nenner der um 1 vergrösserte Exponent des Wurzeltheils b in dem vorhergehenden Gliede ist.

No. 9.) Also wird aus dem vorhergehenden ein nachfolgendes Glied, oder es wird aus dem G das g vermittelst der Multiplication durch $q \times \frac{A}{B+1} = q \times \frac{Z-B}{B+1}$. Denn A ist Z — B, (No. 2.) weil A und B die Potenzialexponenten der Wurzeltheile a und b, in eben demselben vorhergehenden Gliede sind, und weil diese Exponenten zusammen Z seyn müssen.

Das erste Glied der Summe, welche $(a+b)^z$ ist, (No. 1 u. 2.) ist a^z. Der Factor $q \times \frac{A}{B+1}$ oder $q \frac{Z-B}{B+1}$,

we-

wodurch ein vorhergehendes Glied in ein unmittelbar nachfolgendes verwandelt wird, ist gleichfalls bekannt. Also kann man, so hoch auch die Potenz $(a+b)^z$ seyn mag, alle Glieder, die zu $(a+b)^z$ gehören, nach der Reihe finden. Sie sind:

Das erste, $I = a^z \times 1$.

Das zweyte, $II = I(qZ) = (a^z q) Z$.

$$III = (II\,q)\frac{Z-1}{2} = a^z q^2 \left(\frac{Z^2 - Z}{2}\right)$$

$$IV = (III\,q)\frac{Z-2}{3} = a^z q^3 \left(\frac{Z^3 - 3Z^2 + 2Z}{2 \cdot 3}\right)$$

$$V = (IV\,q)\frac{Z-3}{4} = a^z q^4 \left(\frac{Z^4 - 6Z^3 + 11Z^2 - 6Z}{2 \cdot 3 \cdot 4}\right)$$

. . . .

. . . .

Das vorletzte $= K = a^z q^{z-1}$, multiplicirt durch den gehörigen Coefficienten C, also $(a^z q^{z-1})\,C$.

Das letzte.

$$L = (Kq)\frac{Z-(Z-1)}{Z} = a^z q^z \times C\left(\frac{Z-(Z-1)}{Z}\right).$$

Dieses muß das letzte Glied seyn, weil der folgende Coefficient den Factor $\frac{Z-Z}{Z+1}$, oder

Nulle,

Nulle, haben würde. Es ist aber die Ordnungszahl des letzten Gliedes, folglich die ganze Zahl der Glieder, um 1 grösser, als die Ordnungszahl der Potenz, in welcher es das letzte Glied ist. Z. E. die sechste Potenz hat 7, die siebende aber 8 Glieder.

Wenn man nun bedenkt, das q sey $\frac{b}{a}$, so kann man anstatt $a^z q^n$ (was n auch seyn mag) allemal setzen a^{z-n}. Alsdann, wenn der erste Coefficient $\dot{C}$, der zweyte $\ddot{C}$, der dritte $\dddot{C}$ ist, u. s. w. folgen die Glieder so auf einander:

Das erste a^z ($\dot{C} = 1$)

Das zweyte a^{z-1} b^1 ($\ddot{C} = Z$)

Das dritte a^{z-2} b^2 $\dddot{C}$

Das vierte a^{z-3} b^3 $\ddddot{C}$ u. s. w.

Nach diesen Regeln, welche die Lehrsätze von den Potenzen binomischer Wurzeln, oder mit einem Worte, der binomische Lehrsatz heissen, steht von der Wurzel $(a + b)$ die erste, zweyte, bis zehnte Potenz in folgender Tabelle in denen unter einander stehenden Zeilen.

No. 10.

No. 10.) Tabelle nach dem binomischen Lehrsatze.

$1a$	$1b$									
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$								
$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$							
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$						
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	$1b^5$					
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$				
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$			
$1a^8$	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	$8ab^7$	$1b^8$		
$1a^9$	$9a^8b$	$36a^7b^2$	$84a^6b^3$	$126a^5b^4$	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36a^2b^7$	$9ab^8$	$1b^9$	
$1a^{10}$	$10a^9b$	$45a^8b^2$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45a^2b^8$	$10ab^9$	$1b^{10}$

No. 11.) Nach dieser Regel also hat die fünfte Potenz $(a+b)^5$ und $(a-b)^5$ folgenden Unterschied. (Z. E. $(8+2)^5$ und $(8-2)^5$. Das erste nämlich ist 100000, das zweyte 7776.)

$$(a+b)^5 \left\{ \begin{array}{l} (1.8^5) + (5.8^4.2^1) + (10.8^3.2^2) \\ + (10.8^2.2^3) + (5.8^1.2^4) + (1.2^5) \end{array} \right.$$

$$(a-b)^5 \left\{ \begin{array}{l} (1.8^5) - (5.8^4.2^1) + (10.8^3.2^2) \\ - (10.8^2.2^3) + (5.8^1.2^4) - (1.2^5) \end{array} \right.$$

Das ist, wenn b negativ, oder wenn $(a-b)^z$ zu machen ist; so sind die Glieder, worinnen b einen ungeraden Exponenten hat, als das 2te, 4te, 6te, (und so weiter) negativ. Uebrigens aber ist alles gleich.

No. 12.) Dieser binomische Lehrsatz ist vornehmlich alsdann nützlich, wenn es die Absicht erfodert, die Glieder, welche die Summe $(a+b)^z$ oder $(a-b)^z$ sind, ohne wirkliche Berechnung hinzuschreiben, oder wenn man die Grössen a und b, auch wohl den Exponenten Z, noch nicht kennt. Eines grössern Nutzens aber will ich noch im Folgenden erwehnen.

No. 13.) Wenn man eines Gliedes Coefficienten, ohne ihn aus dem Coefficienten des vorhergehenden Gliedes zu machen, unmittelbar bestimmen will: so wendet man die oben (No. 4.) gegebne Lehre an. Diese war, daß der Coefficient jedes Gliedes sey $= Z^* : a^* \, b^*$, oder das grosse Product des ganzen Potenzialexponenten,

nenten, dividirt durch das Product der beyden grossen Producte, wovon das erste den Exponenten des a, das andre den Exponenten des b in demselben Gliede zur Stammzahl (oder zum größten Factor) hat. Z. E. Es wäre in der 9ten Potenz zu bestimmen der Coefficient X zu diesen Potenzialfactoren $a^3 b^6$; so ist $X = \frac{(1.2.3.4.5.6)\ 7.8.9}{(1.2.3.4.5.6)\ 1.2.3} = 84$, wobey die oben und unten eingeschloßnen Factoren wegfallen, wodurch die Berechnung leicht wird, und noch leichter, wenn man alsobald so schreibt $\frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

No. 14.) Weil nach No. 7. der folgende Coefficient c, zu dem vorhergehenden C, sich so verhält, daß $c = C \frac{A}{B+1}$, oder welches einerley ist, daß $c = C \frac{Z-B}{B+1}$, wo B den Exponenten des b in dem vorhergehenden Gliede, (worinnen C der Coefficient ist) bedeutet: so ist

$$CZ - CB = c(B+1)$$
$$CZ = (CB) + c(B+1)$$

Nun ist B der Exponent des b in dem vorhergehenden Gliede; und die Potenzialfactoren, (die Coefficienten ungerechnet) in der Summe, welche $(a+b)^z$ ist, folgen so auf einander: $a^z b^0$, $a^{z-1} b^1$, $a^{z-2} b^2$ u. s. w. Daher ist $B+1$ allezeit die Ordnungszahl des vorhergehenden Gliedes, z. E. wenn $B+1 = 3+1$; so ist das vorhergehende, unter den beyden

verglichnen Gliedern (G und g, deren Coefficienten ich C und c nenne) oder so ist das Glied G das 4te Glied in der Ordnung, von dem ersten Gliede an gerechnet. Also bedeutet der eben jetzund bewiesene Satz, nämlich $CZ = CB + c(B+1)$ in Worten so viel als dieses: Ein jeder durch Z multiplicirte Coefficient eines Gliedes in $(a+b)^z$ ist eine Summe, welche besteht aus zweyen Producten, wovon das erste ist der Coefficient desselben Gliedes, multiplicirt durch seine um 1 verminderte Ordnungszahl n, oder durch $n-1=B$; und wovon das zweyte ist der, durch die ganze Ordnungszahl $n=B+1$ multiplicirte, Coefficient des unmittelbar folgenden Gliedes. Und wenn eine Reihe von so eingerichteten Coefficienten der, in $(a+b)^z$ auf einander folgenden, Producte, (das ist, wenn

$$\dot{C}a^z b^0;\ \ddot{C}a^{z-1} b^1;\ \dddot{C}a^{z-2} b^2;\ \ddddot{C}a^{z-3} b^3)$$

vorkömmt; so darf man nicht zweifeln, daß die Summe dieser Glieder sey, $(a+b)^z$ und daß die so eingerichteten Coefficienten $\dot{C}$, $\ddot{C}$, $\dddot{C}$, $\ddddot{C}$, die rechten Coefficienten sind, weil alsdann der folgende Coefficient aus dem vorhergehenden nach dem binomischen Lehrsatze gemacht ist. Denn gleichwie aus

$$c = C\frac{Z-B}{B+1} \text{ folget, daß } CZ = CB + c(B+1);$$

so folgt auch hieraus rückwärts der erste dieser beyden Sätze.

§. 142.

No. 1.) Es sey die binomische Wurzel $(1+y)$, und es wird eine allgemeine Regel verlangt, wie man die Potenz $(1+y)^z$ ausdrücken soll, und zwar in einer Summe von Gliedern, in welcher die Potenzen b^0, b^1, b^2, b^3, u. s. w. mit Coefficienten auf einander folgen, die ich A, B, C, D, E, u. s. w. nenne, und die noch unbekannt seyn sollen: ausser daß A als $= 1$ voraus gesetzt wird. Es soll, sage ich, $Ab^0 = (1b^0) + BY^1 + CY^2 + DY^3 + EY^4$ (u. s. w.) die Summe $(1+y)^z$ ausmachen, was Z auch für ein Potenzialexponent seyn mag, (§. 63. Zusatz). Z. E. Es sey der Potenzialexponent $Z = +Z$, oder $-W$, eder $+V:Y$, oder $-V:Y$.

Diese allgemeine Regel kann man nicht zeigen und beweisen denen, welche gar keine Kenntniß von dem Rechnen mit Differenzialen haben. Weil ich aber doch an diese höchst wichtige Materie nicht wieder komme, will ich für Geübtere die Regel und den Beweis hinsetzen. Die Uebrigen müssen glauben, bis sie wissen lernen.

No. 2.) Es sey also $(1+y)^z = (A \times 1) + (B\overset{1}{Y}) + (C\overset{2}{Y}) (D\overset{3}{Y}) + (E\overset{4}{Y})$ u. s. w. so ist nach der Differenzialrechnung zweyerley Art des Ausdrucks des Differenzials von $(1+y)^z$. Nämlich $z(1+y)^{z-1}\,dy = B\,dy + 2CY\,dy + 3DY^2dy + 4Ey^3dy$. Also

$z(1+y)^{z-1} = B + 2CY^1 + 3DY^2 + 4EY^3$ u. s. w.

Folglich da $(1+y)(1+y)^{z-1} = (1+y)^z$; so ist

$$Z(1+Y)^Z = (1+y)(B+2CY^1+3DY^2+4EY^3 \text{ u.s.w.})$$
$$= B+2CY+3DY^2+4EY^3$$
$$+ BY+2CY^2+3DY^3.$$ Also ist

No. 3.) $Z(1+y)^Z$ oder die Reihe
$ZA \times 1 + ZBY^1 + ZCY^2 + ZDY^3$ u. s. w. ist
$= B + (B+2C)Y^1 + (2C+3D)Y^2 + (3D+4E)Y^3$ u. s. w.

No. 4.) Man vergleiche die beyden gleichen Gliedersummen. Die erste ist $Z(1+y)^Z$. Das erste Glied in derselben $ZA \times 1$ ist $= Z \times 1 \times 1$ nach der Voraussetzung. Dieß Glied drückt also aus $Z \times 1^Z$, was auch Z für ein Exponent ist. Denn 1^z, 1^{-z}, $1^{1:x}$, $1^{v:w}$, $1^{-(v:w)}$ in allen Potenzen (im weitläuftigen Verstande) ist $= 1$. Ich sage ferner, B muß Z seyn. Denn da wir die Coefficienten in einer allgemeinen Regel suchen; so muß sie auch passen, wenn $Y =$ Nulle ist. Alsdann aber ist in beyden gleichen Reihen (No. 2.) nichts Reelles, als beyderseits das erste Glied. Also ist $B = Z \times 1 \times 1 = Z$. Also sind die Summen der in beyden Reihen (ausser dem ersten) folgenden Glieder gleich, und würden gleich bleiben, wenn sie beyde durch Y dividirt würden. Es würde

$ZB + ZCY^1 + ZDY^2$ noch seyn
$= B+2C+(2C+3D)Y^1+(3D+4E)Y^2$ u. s. w.

Also, weil Y Nulle seyn kann; so ist $ZB = B+2C$. Eben so folget, daß $ZC = 2C+3D$; daß $ZD = 3D+4E$, u. s. w. Kurz, diese unter einander stehenden Coefficienten der gleichen Potenzen von Y sind gleich.

No. 5.

No. 5.) Wenn man nun $(1+y)^z$ nach dem binomischen Lehrsatze (§. 141.) in eine Reihe verwandelt, so folgen die Glieder so auf einander: (wenn ich die Coefficienten a, b, c, u. s. w. nenne)

$(a \times 1)+(by^1)+(cy^2)+(dy^3)+(ey^4)$ u. s. w.

Es ist aber daselbst $a = 1$; und $b = z$. Nun ist nach der allgemeinen Regel, nach welcher $(1+y)^z$ gemacht werden muß, (wie auch der Exponent z beschaffen seyn mag) nämlich in der Reihe $A \times 1 + BY^1 + CY^2 + DY^3 + EY^4$, u. s. w. der Coefficient A gleichfalls 1, und B gleichfalls z, wie No. 4. erwiesen ist. Und, wie eben daselbst erhellet, so ist ein jeder durch z multiplicirte Coefficient, nämlich zA, zB, zC, zD, eine Summe zweyer Producte, davon das erste ist derselbe, durch seine um 1 verminderte Ordnungszahl multiplicirte, Coefficient: und das zweyte der, durch diese ganze Ordnungszahl multiplicirte, folgende Coefficient. Z. E. D ist der vierte Coefficient, seine Ordnungszahl ist 4. Und zD ist $= 3D + 4E$. Also werden die Coefficienten der Glieder, welche $(1+y)^z$ sind, und Y^0, Y^1, Y^2, Y^3, Y^4, u. s. w. enthalten sollen, allesamt aus den vorhergehenden so gemacht, wie es (§. 141. No. 14.) der binomische Lehrsatz erfodert. Oder mit einem Worte, $(1+y)^z$ wird in jedem Falle nach dem binomischen Lehrsatze gemacht.

No. 6.) Das y in $(1+y)^z$ kann auch ein Bruch, z. E. $\frac{b}{a}$ seyn, und $\left(1+\frac{b}{a}\right)^z$ wird in je-

dem Falle eine nach dem binomischen Lehrsatze eingerichtete Reihe ausmachen. Wenn man nun jedes Glied dieser Reihe durch a^z multiplicirt; so macht man $a^z \times \left(1+\frac{b}{a}\right)^z$, oder $\left(a \times 1+\frac{b}{a}\right)^z$, oder $(a+b)^z$, wodurch man erhält eine Reihe, die völlig so eingerichtet ist, als wenn man alsobald $(a+b)^z$ nach dem binomischen Lehrsatze gemacht hätte. Daher, was auch Z für ein Exponent seyn mag, ist der binomische Lehrsatz für die Reihe $(a+b)^z$ eine ganz allgemeine Regel. Dieselbe Regel dient auch für $(a-b)^z$, nur daß alsdann für b, b^2, b^3, b^4, u. s. w. allenthalben $-b$ $(-b)^2 (-b)^3 (-b)^4$ gesetzt werden muß.

No. 7.) Ein Exempel, wie Wurzeln, z. E. $(27+9)^{\frac{1}{3}}$ oder $\sqrt[3]{27+9}$ nach dem binomischen Lehrsatze gefunden werden, sey folgendes:

$A = a^{1:3} = 3$,

$B = \frac{1}{3} \times q\, A = \frac{1}{3} \times \frac{9}{27} \times 3 = \frac{1}{3}$.

$C = \dfrac{\frac{1}{3}-1}{2}\, q\, B = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{27}$

$D = \dfrac{\frac{1}{3}-2}{3}\, q\, C = -\frac{5}{9} \times \frac{1}{3} \times -\frac{1}{27} = +\frac{5}{729}$

$E = \dfrac{\frac{1}{3}-3}{4}\, q\, D = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{729} = -\frac{10}{6561}$, u. s. w.

Diese Glieder sind zusammen $3 + \dfrac{2187-243+9-10}{6561}$ $= 3\frac{1943}{6561}$, das ist, nur $\frac{1}{6561}$ weniger, als $3\frac{8}{27}$. Nehmen wir nun die Cubikzahl von $3\frac{8}{27}$, so ist sie $\left(\frac{89}{27}\right)^3 = \frac{704969}{19683} = 36 - \frac{3619}{19683} = 36 - \frac{1}{5}$.

Es

Es ist also $3\frac{8}{27}$ ziemlich genau die Cubikwurzel von $27+9$ oder von 36. Daß die Wurzel^3 weniger als 36 giebt, kömmt daher, weil ich die Reihe durch ein negatives Glied E abgebrochen habe. Hätte ich noch F gemacht, so wäre eine etwas zu grosse Wurzel gefunden; durch den Zusatz von G wieder eine etwas zu kleine; durch H wieder eine etwas zu grösse, u. s. w. aber allemal würde das Gefundene näher an die wahre Wurzel gränzen, das ist, das Cubik desselben würde der Zahl 36, woraus die Wurzel gesucht wird, immer näher kommen. So geht es immer, wenn man negative Potenzen oder wenn man Wurzeln durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes sucht. Je weiter man die Reihe fortführt, desto näher kömmt man dem Gesuchten; aber schon nach Summirung der ersten Glieder ist man ziemlich nahe, und zwar um destomehr, je kleiner q oder $\frac{b}{a}$, das ist, je kleiner das Verhältniß des zweyten zum ersten Theile in der Zahl $(a+b)$ oder $(a-b)$ ist, deren negative oder gebrochne Potenz (oder deren Wurzel) gesucht wird.

§. 143.

Ich will überhaupt etwas mehr von den Reihen sagen, oder von zusammengesetzten Grössen, deren Glieder nach einerley Regel auf einander folgen, und nach derselben entweder zunehmen oder abnehmen.

Man sehe hier nach, was von geometrischen Reihen oben im siebenden, und von arithmetischen im neunten Hauptstücke gesagt ist.

Wer das algebraische Dividiren (§. 63.) versteht, wird finden, 1) $1:(1-x)$ giebt die Reihe $1+x+x^2+x^3$ . . . 2) $1:(x-1)$ giebt die Reihe $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}$ . . . 3) $1:(1+x)$ giebt die Reihe $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5$ . . . . 4) Ist in dieser Division $x=1$; so ist $1:(1+1)$ (oder $1:2$) $=1-1+1-1+1-1$ . . . . und zuletzt, (wenn man die Division nicht länger fortsetzen, sondern die Ergänzung hinzu setzen will,) noch entweder $+\frac{1}{2}$, wenn die Ordnungszahl des allerletzten Gliedes ungerade, oder $-\frac{1}{2}$, wenn sie gerade ist. 5) $a:(a+b)$ (welches so viel ist, als $1:(1+\frac{b}{a})$, oder nach einer andern Benennung, als $1:(1+x)$) giebt die vorige Reihe (No. 3.) nämlich $1-x+x^2-x^3$ . . . $=1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}$ . . . Hingegen $a:(a-b)$ (welches ist $=1:(1-\frac{b}{a})=1:(1-x)$) giebt die vorige Reihe (No. 1.) $1+x+x^2+x^3+x^4$ . . . oder $1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^3}{a^3}$ . . . 6) Den Bruch aber $\frac{a}{b+c}$ kann man durch Division verwandeln in die Reihe $\frac{a}{b}-\frac{ac}{b^2}+\frac{ac^2}{b^3}-\frac{ac^3}{b^4}$ . . $(\pm)\frac{ac^n}{b^n(b+c)}$.

Dieses

Dieses sey nur erwähnt, um Anlaß zu Uebungen in solchen Divisionen, oder vielmehr in solchen Veränderungen (der Grössen) zu geben, durch welche man regelmässige Reihen erhält.

§. 144.

Wenn von einer kleinern Zahl k eine grössere g, um die Differenz d verschieden ist: so ist $g^2 = k^2 + 2kd + d^2$; so daß $2kd + d^2$ der Unterschied beyder Quadrate ist; dieser Unterschied, wenn d nur 1 ist, wird $2k + 1$. Nun wollen wir 3 solcher Quadrate vergleichen, deren Grundzahlen 1 zu ihrer Differenz haben, z. E. n^2, $(n+1)^2$, $(n+2)^2$; so ist die Differenz des zweyten und ersten Quadrats $(2n)+1$; aber die Differenz des dritten und zweyten ist $2(n+1)+1$. Die Differenz dieser beyden Differenzen, welche auch die zweyte Differenz der Quadrate heißt, ist 2. Daher in natürlicher Ordnung

Die Zahlen	1	2	3	4	5	u. s. w.
Quadrate	1	4	9	16	25	u. s. w.
Erste Diff.		(2.1)+1	(2.2)+1	(2.3)+1	(2.4)+1	u. s. w.
oder . . .		3	5	7	9	u. s. w.
Zweyte Diff. . .			2	2	2	u. s. w.

Die Summe jedes Quadrats mit den vorhergehenden ist 1 5 14 30 55.

Es ist aber oft daran gelegen, zu wissen, wie viel die Summe der Quadrate von 1^2 bis an ein gewisses Glied, z. E. bis an n^2 (dieses mitgerechnet) betrage. Wenn wir diese Summe S wüßten: so liesse sie sich ausdrücken durch $An^3 + Bn^2 + Cn^1$, wo ich unter A, B, C, die Factoren

oder

oder Coefficienten verstehe, die wir noch nicht wissen. Es sey also Sn^2 die Summe aller Quadrate von n^2 an bis 1^2, und $S(n+1)^2$ die Summe aller Quadrate von $(n+1)^2$ an bis 1^2. So ist

$$S(n+1)^2 = A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + C(n+1)^1$$
$$Sn^2 = An^3 + Bn^2 + Cn^1$$
$$S(n+1)^2 - Sn^2 = (3An^2+3An+A)+(2Bn+B)+C$$
$$= 3An^2 + (3A+2B)n + (A+B+C)$$

Diese Differenz der Summen $S(n+1)^2 - Sn^2$ aber ist auch das hinzugekommne größte Quadrat $(n+1)^2 = 1n^2 + 2n^1 + 1$. Beyde gleiche Differenzen enthalten das Quadrat n^2, und das n mit solchen Coefficienten, welche gleich seyn müssen, weil die Summe ihrer Producte, durch dieselben Potenzen der Zahl n, gleich ist. Es ist also

$3A = 1$, folglich $A = \frac{1}{3}$

$3A+2B = 2$; folglich $1+2B = 2$: folglich $B = \frac{1}{2}$.

$A+B+C (= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + C) = 1$. Also $C = \frac{1}{6}$.

Also ist Sn^2 (was auch n für eine grosse Zahl in der Reihe 1, 2, 3 . . . 1000 u. s. w. bedeutet,) also, sage ich, ist die Summe aller Quadrate von n^2 bis 1^2, oder so ist Sn^2 (welches wir annehmen als $An^3 + Bn^2 + Cn$) $= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$.

Es sey $n = 5$; so ist

$$\left.\begin{array}{r} 2n^3 = 250 \\ 3n^2 = 75 \\ n = 5 \\ \hline 6)\ 330 \\ \hline 55 \end{array}\right\} = \begin{array}{r} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ 25 \\ \hline 55 \end{array}$$

§. 145.

§. 145.

Eine ähnliche Betrachtung will ich über die Cubikzahlen machen. Wenn k und g um 1 verschieden sind; so ist $g^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$. Also ist die Differenz solcher Cubikzahlen $3k^2 + 3k + 1$. Wir wollen 4 solcher Cubikzahlen mit einander vergleichen, nämlich

Cubikzahl. $n^3, (n+1)^3 = p^3, (n+2)^3 = q^3, (n+3)^3 = r^3$

1ste Unters. $3(n^2+n)+1, 3(p^2+p)+1, 3(q^2+q)+1$

2te Unters. . . $3(p^2+p)-3(n^2+n), 3(q^2+q)-3(p^2+p)$

3te Unterschiede. . . . . . $3(q^2+q+n^2+n)-6(p^2+p)$

Weil nun $q = n+2$, und weil $p = n+1$; so ist dieser dritte Unterschied $= 3(n+2)^2 + 3(n+2) + 3(n^2+n) - 6((n+1)^2+n+1)$

$$\left.\begin{aligned} = 3n^2 + 12n + 12 \\ + 3n + 6 \\ + 3n^2 + 3n \\ - 6n^2 - 12n - 6 \\ - 6n - 6 \end{aligned}\right\} = 6$$

Zahlen . .	1	2	3	4	5
Cubikzahlen . .	1	8	27	64	125
Erste Unterschiede . . .		7	19	37	61
Zweyte Unterschiede . . .			12	18	24
Dritte Unterschiede				6	6
Die Sum̃e jeder Cubikzahl mit den vorgehenden ist	1	9	36	100	225

Es ist oft daran gelegen, diese Summe in der Reihe der Cubikzahlen von 1^3 bis n^3 (dieses mit eingeschlossen) zu wissen, oder durch eine Formel zu bestimmen. Wir wollen also sehen, was Sn^3, oder die Summe n^3, nebst allen kleinern bis 1^3, zusammen

men betrage in der Reihe $n^4 + n^3 + n^2 + n^1$, wenn wir diesen Potenzen die rechten Coefficienten oder Factoren, welche A, B, C, D, seyn mögen, und uns noch unbekannt sind, zufügen. Wir setzen also voraus, in Ansehung beyder Summen, es sey
$S(n+1)^3 = A(n+1)^4 + B(n+1)^3 + C(n+1)^2 + D(n+1)$
$Sn^3 = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn.$

Man subtrahire; so findet man nach dem binomischen Lehrsatze: $S(n+1)^3 - Sn^3$ sey $=$
$4An^3 + 6An^2 + 4An + A + 3Bn^2 + 3Bn + B + 2Cn + C + D = 4An^3 + (6A + 3B) \times n^2 + (4A + 3B + 2C) \times n + (A + B + C + D)$. Derselbe Unterschied $S(n+1)^3 - Sn^3$ aber ist auch die hinzugekommne größre Cubikzahl $(n+1)^3 = 1n^3 + 3n^2 + 3n + 1$.

Also ist, (da die Coefficienten, wodurch dieselben Potenzen von n eine gleiche Grösse hervorbringen, gleich seyn müssen,)

$4A = 1$, oder $A = \frac{1}{4}$. Und
$6A + 3B = 3$; oder $\frac{6}{4} + 3B = 3$: oder $3B = 1\frac{1}{2}$; also $B = \frac{1}{2}$.
Und $4A + 3B + 2C = 3$; oder $1 + 1\frac{1}{2} + 2C = 3$; oder $2C = \frac{1}{2}$, (folglich $C = \frac{1}{4}$.
Und $A + B + C + D = 1$; oder $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + D = 1$. Also $D = 0$.

Also, da die Coefficienten gefunden sind; so ist
$$Sn^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$

Z. E. Es sey $n = 5$.

So ist $n^4 = 625$
$2n^3 = 250$
$n^2 = 25$
4) 900
225

$=$ 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225

So ist $n^4 = 625$		1
$2n^3 = 250$		8
		27
$n^2 = 25$	$=$	64
4) 900		125
225		225

XII.

XII.

Noch etwas von Gleichungen.

§. 146.

Eine jede Bedeutung, welche in einer Gleichung das Zeichen der unbekannten Grösse haben kann, heißt eine Wurzel der Gleichung. Es ist oben (§. 74.) schon Verschiednes davon gesagt.

In allgemeiner Betrachtung über die Wurzeln der Gleichung pflegt man vorauszusetzen: 1) daß sie in eine nullirte Gleichung verwandelt sey, z. E. $4X^2 - 2X = 60$ in diese: $4X^2 - 2X - 60 = 0$. 2) daß die Glieder oder Theile (§. 59.) nach der Höhe der Potenzen in Ordnung stehn. Man bezeichnet aber die unbekannte Grösse allezeit mit den letzten Buchstaben u, v, w, x, y, z. Alle andere sind allgemeine Ausdrücke für solche Zahlen, oder Grössen, die man als bekannt annimmt.

Die Wurzeln sind entweder positiv, z. E. wenn $y = 3$, oder negativ, wenn $y = -3$; oder Nulle, wenn $y = 12 - d$, oder 12 weniger ein Dutzend; oder unmöglich, z. E. $\sqrt[2]{-16}$; oder $\sqrt[4]{-16}$. Es ist oben gesagt, (§. 59.) wie durch den Irrthum, daß es Zahlen von gewisser Beschaffenheit, die doch unmöglich ist, gebe, die unmöglichen Wurzeln entstehen können.

In Gleichungen, worinnen die unbekannte Grösse ein Factor in allen Gliedern ist; kann die Wurzel allemal Nulle seyn. Z. E. in $4X^2 - 8X = 0$; oder in $X^2 - \frac{8}{4}X = 0$. Denn wenn man X als Nulle annimmt; so bleibt

die

die Gleichung wahr. Und eben dieses ist doch das allgemeine Zeichen, daß dieses oder jenes eine Wurzel seyn könne. Ausser Nulle aber ist hier die zweyte Wurzel = 2.

Wenn in einer quadratischen Gleichung nur zwey Glieder sind, und auch das zweyte bekannte Glied positiv ist: so ist keine mögliche Wurzel erdenklich, z. E. in $X^2 + m = 0$. Denn es folgt $X^2 = - m$, und ferner $X = \pm \sqrt{- m}$.

Auch alsdann finden sich nur 2 unmögliche Wurzeln, wenn in einer quadratischen Gleichung von 3 Gliedern, (z. E. $X^2 + a X + b = 0$, oder in $X^2 - a X + b = 0$) das dritte Glied positiv, und das Quadrat der Hälfte des Coefficienten im zweyten Gliede kleiner ist, als das dritte bekannte Glied. Denn aus $X^2 \pm a X + b = 0$, wird $X^2 \pm a X = - b$; oder $X^2 \pm a X + (\frac{1}{2} a)^2 = - b + (\frac{1}{2} a)^2$, oder $(X \pm \frac{1}{2} a)^2 = - b + (\frac{1}{2} a)^2$, oder $X \pm \frac{1}{2} a = \sqrt{- b + (\frac{1}{2} a)^2}$, welches in dem gesagten Falle eine unmögliche Zahl ist, wie $\sqrt{-40 + (\frac{1}{2} . 12)^2} = \sqrt{-4}$.

§. 147.

Man kann aus jeder Gleichung, worinnen gebrochne Coefficienten vorkommen, die Brüche wegschaffen, nämlich durch Weglassung des Nenners der gebrochnen Einheiten, und vermittelst der Multiplication aller übrigen Theile der Gleichung durch den weggelassenen Nenner, als wodurch die ganze Gleichung multiplicirt wird, und nicht aufhört, eine Gleichung zu seyn.

Z. E. $2\frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{4}X^2 + 5X - 27 = 0$. Dieß wird $10X^3 - 3X^2 + 20X - 108 = 0$.

Wenn die höchste Potenz der unbekannten Grösse keinen Coefficienten hat, und kein Bruch in der Gleichung ist: so ist unter den Wurzeln kein (ächter) Bruch, und keine mit einem ächten Bruche vermischte Zahl. (Sondern alsdann sind alle Wurzeln entweder Totalzahlen, oder irrationale, das ist, durch unauflösliche Wurzeln ausgedrückte Grössen, welche theils mögliche, theils unmögliche seyn können.) Denn eine jede Potenz einer solchen Zahl, die entweder ein Bruch ist oder damit vermischt wird, giebt einen Bruch oder eine damit vermischte Zahl. Eine aus einer solchen Wurzel entstandene Gleichung, (wenn ich die Coefficienten A, B, C, u. s. w. nenne, und alle Glieder positiv setze, welches geschehn kann, wenn man unter + bald den Zusatz einer positiven bald negativen Zahl versteht, (z. E. bald $+(-A)$ bald $+(+B)$) eine solche Gleichung, sage ich, würde alsdann eine solche Form haben:

1) (wenn $X = \frac{Z}{n}$) $\left(\frac{Z}{n}\right)^p + A\left(\frac{Z}{n}\right)^{p-1}$

$+ B\left(\frac{Z}{n}\right)^{p-2} \ldots\ldots L\left(\frac{Z}{n}\right)^1 + N$,

wobey N das bekannte Glied bedeutet. Es wird nicht nur N, sondern auch A, B, . . . L, und jeder Coefficient als total und rein voraus gesetzt. Das ist, alle Glieder (ausser N) sind $\left(\frac{Z}{n}\right)^p$, und ein oder mehr $\left(\frac{Z}{n}\right)^{p-1}$ und ein oder mehr $\left(\frac{Z}{n}\right)^{p-2}$

und so weiter. Das erste dieser Glieder, nämlich $\left(\frac{Z}{n}\right)^p$ ist $= \frac{Z^p}{n^p} = 1 - \frac{(n^p - Z^p)}{n^p}$. Folglich muß zu $\left(\frac{Z}{n}\right)^p$ der Bruch $\frac{n^p - Z^p}{n^p}$ hinzu kommen, um 1 zu werden; das ist, es muß in den übrigen Gliedern ein $\frac{n^p - Z^p}{n^p}$ da seyn, weil sonst das erste Glied nicht 1 wird, und weil sonst N, das bekannte Glied, nicht total und rein seyn kann. Es ist aber kein Bruch mit dem Nenner n^p und mit dem Zähler $n^p - Z^p$ da; ein solcher Bruch kann auch aus den übrigen, nämlich aus $\left(\frac{Z}{n}\right)^{p-1}$, aus $\left(\frac{Z}{n}\right)^{p-2}$, u. s. w. nicht werden. Folglich ist unter den gesagten Umständen die Bedeutung oder Wurzel des X nicht $\frac{Z}{n}$ oder kein Bruch.

Eben so kann man 2) schließen, daß X nicht seyn könne $t + \frac{Z}{n}$, wobey t eine Totalzahl bedeutet. Die Gleichung z. E. $X^3 + X^2 + 3X + 5 = 0$, oder $X^3 + X^2 + 3X = -5$, welche Wurzeln haben, diese Gleichung, sage ich, davon sich keine totale Wurzel finden läßt, hat nur irrationale oder durch das Wurzelzeichen ausgedrückte Bedeutungen des Buchstabens X.

§. 148.

§. 148.

Vollständig heissen die Gleichungen, wenn X^p, X^{p-1}, X^{p-2} ... ununterbrochen auf einander folgen, bis das letzte X^{-n} ist X^1 oder X, worauf alsdann die bekannte Grösse N folgt, z. E. $4X^4 + 2X^3 - 6X^2 + 5X - 66 = 0$, wo $X = 2$ seyn kann. Unvollständig aber, wenn einige dieser Glieder fehlen, als $4X^4 + 2X^3 - 80 = 0$, oder $4X^4 + 5X - 74 = 0$, oder $X^4 - 5X^2 + 15X - 26 = 0$. Die fehlende Potenz kann man auch durch Nulle ausdrücken. Z. E. $X^4 \pm 0X^3 - 5X^2 + 15X - 26 = 0$.

Wenn man Ursache hat, anstatt einer unvollständigen Gleichung eine vollständige zu wünschen: so setze man $X = Y \pm a$, wobey a eine bekannte Zahl bedeutet: so erhält man eine vollständige Gleichung, in welcher die unbekannte Grösse eine andre, nämlich Y ist. Man setze $X = Y + 1$; so wird die letzte Gleichung folgende: $Y^4 + 4Y^3 + 6Y^2 + 4Y + 1 - 5Y^2 - 10Y - 5 + 15Y + 15 - 26 = 0$, oder $Y^4 + 4Y^3 + Y^2 + 9Y - 15 = 0$. Hier kann $Y = 1$ seyn, und weil $Y + 1 = X$; so kann X abermals 2 seyn.

Will man aber aus gewisser Ursache, anstatt einer vollständigen, lieber eine solche Gleichung, worinnen das zweyte Glied fehlt: so wähle man ein X für ein Y, (das ist, eine unbekannte Zahl für eine andre,) und setze, wenn das zweyte Glied positiv ist, $Y = X - a$; wenn es aber negativ ist,

$y = x + a$; wobey ich aber unter a nicht eine jede bekannte Grösse, sondern $\frac{A}{p}$, das ist, den Coefficienten des wegzuschaffenden zweyten Gliedes, wenn er durch den höchsten Potenzialexponenten (nämlich des ersten Gliedes) dividirt ist, verstehe. Also, wenn aus der letzten Gleichung das zweyte Glied, $+ 4 y^3$, soll weggeschafft werden: so muß man setzen $y = x - \frac{4}{4} = x - 1$; so wird die neue Gleichung folgende: $(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) + (4x^3 - 12x^2 + 12x - 4) + (x^2 - 2x + 1) + (9x - 9) - 15 = 0$. Oder $x^4 - 5x^2 + 15x - 26 = 0$, in welcher x wieder $= 2$ seyn kann.

§. 149.

Wenn man ein Product aus solchen Factoren macht, $(x - a)$ $(x - b)$ $(x + c)$ u. s. w. wobey x etwas Unbekanntes; a, b, c, u. s. w. aber bekannte Zahlen bedeuten sollen; so wird das Product eine vollständige Reihe. (§. 148.) Z. E.

$$\begin{array}{r} x - a \\ x - b \\ \hline x^2 - (a+b)x + ab \\ x + c \\ \hline x^3 - (a+b)x^2 + abx \\ + \; c \; x^2 - c(a+b)x + cab \\ \hline x^3 + ((-a-b+c)x^2) + ((ab-ac-bc)x) + abc. \end{array}$$

Oder

Oder in Zahlen:

$$\begin{array}{l} X - 2 \\ X - 3 \\ \hline X^2 - (3+2)X + 3.2 \\ \qquad\qquad X + 4 \\ \hline X^3 - (3+2\ X^2 + 3.2\,X \\ \quad + \quad 4\ X^2 - (4.3+4.2)X + 2.3.4. \\ \hline X^3 + (-2-3+4)X^2 + (3.2-4.3-4.2)X + 2.3.4. \end{array}$$

Wenn wir nun A, B, C, u. s. w. die Coefficienten des zweyten, dritten, vierten Gliedes, worinnen X steht, nennen, (denn das erste Glied hat hier keinen Coefficienten,) und wenn das ganze bekannte Glied, welches zuletzt steht, N heißt: so wird ein solch Product durch diese allgemeine Formel vorgestellt:

$$(X^p + AX^{p-1} + BX^{p-2} \ldots + N) = Y$$

wobey vorausgesetzt wird, daß das nächstletzte Glied, welches vor N steht, den Exponenten 1 hat, und daß das Pluszeichen nur ein Zeichen der algebraischen Addition ist, welches nach Beschaffenheit der Sache (wenn ein Coefficient negativ ist) in das Minuszeichen verwandelt werden muß. Die Betrachtung dieses Products, oder dieser Gleichung, ist sehr wichtig.

1) Der Exponent p zeigt uns die Menge der Factoren, woraus die Gleichung werden kann.

2) A ist die algebraische Summe der bekannten Grössen a, b, c, die, entweder durch + oder — mit X verknüpft, als Factoren gebraucht wurden.

3) B ist die Summe der Producte eines jeden Factors unter a, b, c, durch einen jeden einzelnen. Wäre noch C da, (welches seyn würde, wenn wir anstatt 3, mehr Factoren dieser Art, z. E. X—a, X—b, X—c, X—d, u. s. w. multiplicirt hätten) so würde C seyn die Summe der Producte eines jeden durch die andern Paare, u. s. w.

4) N, die letzte bekannte Grösse, ist endlich das Product aller, in den Factoren (X—a, X+c, u. s. w.) mit X in Verbindung gewesenen bekannten Grössen a, b, c, d, e, ...

5) Y, oder die Bedeutung der ganzen Reihe, ist alsdann Nulle, wenn irgend einer der Factoren (X—a, X+b, u. s. w.) Nulle war. Es ist aber X—a = 0, wenn X = a, und X + c ist = 0, wenn X = — c ist, nämlich wenn X zwar negativ ist, aber als positiv, dem positiven c gleich wäre.

§. 150.

Eine jede Gleichung (es ist aber nur von solchen die Rede, worinn nur eine unbekannte Grösse ist) wird, wenn es nöthig ist, zur Untersuchung der Wurzeln vorbereitet auf folgende Art. 1) Man sammlet und ordnet die Glieder nach der Höhe der Potenzen der unbekannten Grösse; die höchste Potenz ist im ersten Gliede. 2) Man nullirt

nullirt sie oder setzt sie gegen Nulle. 3) Man dividirt, wenn alle Glieder Coefficienten haben, die durch einen allgemeinen Divisor dividirt werden können, sie allesammt durch den größten allgemeinen Divisor. Die bleibenden Brüche verkleinert man nach Möglichkeit. 5) Man befreyt das erste Glied von seinem Coefficienten, wenn es einen hat, durch Division. 6) Man wählt (§. 148.) eine vollständige Gleichung statt einer unvollständigen. 7) Man verändert die Gleichung allemal so, daß die höchste Potenz von X, oder X^p, mit dem Pluszeichen $+ X^p$ stehe. Alsdann bekommen alle Gleichungen die Gestalt der Gleichung y, (§. 149.) welche die allgemeine Formel ist. Und alsdann ist der Betrag der Gleichung, oder $y = 0$. Alsdann gilt auch alles, was (§. 149.) von der allgemeinen Formel der Gleichungen erwiesen ist. Hier setze ich noch Folgendes hinzu:

1) Eine jede solche Gleichung (nämlich das ganze, der Nulle oder dem y entgegenstehende und gleiche, Glied derselben) ist ein Product so vieler Factoren dieser Art, ($X - a$, $X + b$, u. s. w.) als p, der höchste Exponent, Einheiten hat. Und weil alles Nulle ist, und Nulle wird, wenn nur einer dieser Factoren (§. 149.) Nulle ist: (das ist, wenn $X = a$, oder $X = - b$, u. s. w.): so entscheidet die Gleichung nicht, welcher von diesen Factoren Nulle sey; sie entscheidet also nicht, was man unter X verstehe, sondern läßt uns die Wahl unter so vielen Wurzeln der Gleichung, als p Einheiten hat.

2) Diese Wurzeln nun, von deren Anzahl ich rede, sind a, b, c, u. s. w. welche in den Factoren $X - a$, $X + b$, u. s. w. mit X verbunden wurden, und zwar sind sie positive Wurzeln; wenn sie durch Minus, negative aber, wenn sie durch Plus damit verbunden waren. Denn a ist die Wurzel, wenn $X - a = 0$, weil alsdann $X = a$; und $- a$ ist eine Wurzel, wenn $X + a = 0$, weil alsdann $X = - a$ ist.

3) Diese Wurzeln der Gleichung sind entweder alle rational oder nicht, alle möglich oder nicht. Z. E. die 3 Wurzeln der Gleichung, $X^3 + 3X^2 + 5X + 15 = 0$, sind erstlich $- 3$, zweytens $+ \sqrt{-5}$, drittens $- \sqrt{-5}$; also 2 negative, eine positive, nur eine mögliche, aber 2 unmögliche.

Hingegen $X^3 + 3X^2 - 5X - 15 = 0$ hat die Wurzeln, erstlich $- 3$, zweytens $+ \sqrt{5}$, drittens $- \sqrt{5}$, allesammt möglich, doch nur eine rational.

§. 151.

Man sehe diese Exempel der Folge der Zeichen + und − in den Gliedern einer Gleichung:

erstlich	+	+	+	+	+	+	+
zweytens	−	−	−	−	−	−	−
drittens	+	−	+	−	+	−	+
viertens	+	+	+	−	+	−	−

Die Verbindung jedes Zeichens mit dem folgenden, ist eine Zeichenfolge. In jeder von diesen Zeilen sind 6 Folgen; in jeder der bey-

beyden ersten Zeilen sind 6 einförmige Folgen; (eine einförmige Folge ist + + oder — —, eine zweyförmige hingegen — + oder + —) in der dritten Zeile sind 6 zweyförmige Folgen; in der letzten 3 zweyförmige, und 3 einförmige. Wenn nun die Wurzeln einer Gleichung allesammt mögliche Grössen sind: so hat dieselbe so viele zweyförmige Zeichenfolgen, als positive Wurzeln, und so viele einförmige Folgen, als negative Wurzeln.

Beweis. Man mache eine Gleichung durch Multiplication der Factoren X — a, X — b, X — c, u. s. w. das ist, durch Multiplication von lauter positiven Wurzeln, so wird man einsehn, daß die Gleichung keine andre als zweyförmige Folgen erhalten könne. Nimmt man aber lauter negative Wurzeln, das ist, lauter solche Factoren, als X + d, X + e, X + f, u. s. w. so wird man eine Gleichung mit lauter Pluszeichen, also lauter einförmige Folgen erhalten. Der Zeichenfolgen überhaupt aber sind so viele, als Glieder, weniger ein Glied, in der Gleichung sind, oder als p, der Exponent der höchsten Potenz, Einheiten hat, und also als Wurzeln der Gleichung sind. Diese Kenntnisse sind die erste Vorbereitung zum Beweise.

Eine jede Gleichung aber, (die Folge ihrer Zeichen mag seyn, wie man will,) erhält wenigstens eine einförmige Folge mehr, als sie hatte, wenn sie durch X + a, das ist durch eine mögliche negative Wurzel, multiplicirt wird.

Man sehe ein Exempel:

$$+x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 9 = 0$$
$$+x + 3$$

$$+x^5 - 2x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 9x$$
$$+3x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 18x - 27$$

$$+x^5 + 1x^4 - 2x^3 + 18x^2 + 9x - 27 = 0.$$

Die letzte vermittelst der Multiplication durch $x + 3$ entstandne Gleichung hat eine gleichförmige Zeichenfolge mehr, als die erste Gleichung. Es muß aber unfehlbar allezeit die Anzahl der gleichförmigen Folgen dadurch anwachsen. Denn a) weil der Factor $+ x + 3$ zwey Plustheile hat; so wird in beyden Specialproducten dieselbe Folge der Zeichen beybehalten, die in der multiplicirten Gleichung war; die beyden Specialproducte sind also an Folge der Zeichen einander gleich; stehn aber so unter einander, daß die vorhergehende Stelle in der obern Reihe allezeit dasselbe Zeichen hat, als die nachfolgende Stelle in der untern Reihe. b) Jede Stelle (ausser der ersten und der letzten) enthält zugleich ein Glied aus dem ersten und aus dem zweyten Specialproducte, die zusammen, wenn die Zeichen gleichartig sind, eine Summe, wenn sie aber widrig sind, eine Differenz geben, wobey das Zeichen des grössern Coefficienten in der Gleichung, die man machen will, beybehalten wird. c) Nun entsteht durch Addition der beyden Specialproducte die letzte Gleichung. Wenn nun in den Differenzen niemals das untere Zeichen beybehalten wird,

(ausser

(ausser daß das letzte Glied, welches in der untern Reihe steht, hinzu kömmt:) so bleibt die Zeichenfolge der ersten Gleichung in der zweyten unverändert, bis dieses letzte Glied hinzukömmt, und noch eine gleichförmige Zeichenfolge verschafft. Wird aber in einer Differenz das untere Zeichen beybehalten: so wird die ungleichförmige Folge, die das verwechselte Zeichen mit dem vorgängigen Zeichen machte, durch die Verwechselung in eine einförmige Folge verwandelt. Wenn nun auch eben dadurch sollte mit dem folgenden Gliede eine vorhin nicht da gewesene zweyförmige Zeichenfolge entstehn; so ist doch wenigstens durch diesen Wechsel keine gleichförmige Folge zernichtet; sondern alsdann nur die ungleichförmige, die zur linken war, mit einer gleichförmigen, die zur rechten war, verwechselt worden. Also wird, so oft ein unteres Zeichen in einer Differenz den Vorzug erhält, wenigstens die Zahl der gleichförmigen Folgen nicht gemindert. Also muß die letzte gleichförmige Folge, die aus der Verbindung des letzten Gliedes in der ersten Reihe, und des letzten Gliedes in der andern Reihe, entsteht, wenigstens gewonnen werden. Dieß war die zweyte vorbereitende Erkenntniß.

Eben so kann man beweisen, daß, wenn eine Gleichung durch eine positive Wurzel X — a multiplicirt wird, die Anzahl der zweyförmigen oder abwechselnden Zeichenfolgen wenigstens um eine Einheit anwachse.

$$X^4 - 2X^3 + 4X^2 + 6X - 9 = 0.$$
$$X - 4$$

$$X^5 - 2X^4 + 4X^3 + 6X^2 - 9X$$
$$-4\,\text{„} \quad +8\,\text{„} \quad -16\,\text{„} \quad -24 + 36$$

$$X^5 - 6X^4 + 12X^3 - 10X^2 - 33X + 36 = 0.$$

Die Zahl der ungleichförmigen Folgen ist um eine Einheit angewachsen. Ueberhaupt wenigstens um eine Einheit muß allezeit diese Zahl vergrössert werden. Denn, wenn in allen Differenzen die Zeichen des oberen Specialproducts geltend bleiben; so kömmt man doch aus dem letzten Zeichen der obern Reihe in das letzte Zeichen der untern Reihe, welches, weil diese Zeichen widrig seyn müssen, eine zweyförmige Zeichenfolge giebt. Gilt aber in irgend einer Differenz ein unteres Zeichen; so wird eine gleichförmige Folge in eine ungleichförmige verwandelt von der linken Seite her. Also kann durch den Vorzug des untern Zeichens wenigstens keine ungleichförmige Folge verlohren gehen. Daher muß zuletzt wenigstens die ungleichförmige Folge, die aus der Verbindung der letzten Glieder beyder Reihen entsteht, gewonnen werden. Dieß war die dritte vorbereitende Erkenntniß.

Nun zum Beweise der Hauptsache.
a) Es ist einerley, in welcher Ordnung man die Wurzeln, woraus eine Gleichung entsteht, multiplicirt; es entsteht zuletzt einerley Gleichung mit einerley Zeichenfolge. b) Es habe eine Gleichung (genannt G) zweyförmige Folgen an Anzahl m, ein=

einförmige Folgen an Anzahl n. So ist in G der Exponent der höchsten Potenz auch $m + n$; so ist die Anzahl der Wurzeln gleichfalls $m + n$.

Nun entstehe die Gleichung G erstlich so, daß zuerst alle positive Wurzeln multiplicirt werden. Dadurch entstehn lauter zweyförmige Folgen an Anzahl M, nämlich, dieß soll die Zahl der positiven Wurzeln seyn. Nun mögen nach und nach die negativen Wurzeln, an Anzahl N, hinein multiplicirt werden: so wird die Gleichung G haben

a) überhaupt Zeichenfolgen und Wurzeln an Anzahl $m + n = M + N$.

b) einförmige Folgen, (weil jede negative Wurzel wenigstens eine mit sich bringt,) an Anzahl $N + d$. Ich nenne d den Ueberschuß.

c) zweyförmige Folgen an Anzahl $M - d$.

Nun entstehe die Gleichuug G zweytens so, daß anfangs durch die negativen Wurzeln, an Anzahl N, auch einförmige Folgen an Anzahl N, entstehen. Wenn alsdann die positiven Wurzeln, an Anzahl M, hinein multiplicirt werden; so hat die Gleichung G.

Abermals überhaupt Zeichenfolgen an Anzahl $m + n = M + N$.

Zweyförmige Folgen, (weil jede positive Wurzel wenigstens eine hinein brachte,) an Anzahl $M + U$. Ich nenne U den Ueberschuß.

Ein=

Einförmige Folgen, an Anzahl N — U.
Nun also m = M — d = M + U.
Und n = N + d = N — U.

Also — d = + U. Folglich o = U + d, und weil weder U noch d eine negative Zahl ist; so ist U = o und d = o. So ist m, die Anzahl der zweyförmigen Zeichenfolgen, gleich der Anzahl M der positiven Wurzeln; und n, die Anzahl der einförmigen Folgen, ist gleich der Anzahl N der negativen Wurzeln in der Gleichung, welches ich erweisen wollte, aber nur von solchen Gleichungen verstehe, die lauter mögliche Wurzeln haben.

§. 152.

1) Bleibt die nullirte Gleichung G nullirt oder wahr, wenn man dem Zeichen der unbekannten Grösse eine gewisse **Bedeutung giebt: so ist diese Bedeutung** eine **Wurzel** der Gleichung.

2) Wenn die Gleichung G durch X — n, oder durch X + n (wobey n eine bekannte Grösse bedeutet) sich so **dividiren läßt, daß kein Rest bleibt:** so ist n in dem ersten Falle eine positive, in dem zweyten eine negative Wurzel.

3) (Die durch einen solchen Divisor dividirte Gleichung G heisse g). Der Quotient nach solcher Division oder g ist Nulle, wenn man dem X irgend eine der Bedeutungen giebt, welche die übrigen Wurzeln der Gleichung G hatten; kurz, **der Quotient oder** g

ist

ist eine Gleichung, welche die übrigen Wurzeln der Gleichung G enthält. Man dividire sie abermal: so kann man eine andre Wurzel finden, u. s. w.

4) Da aber die Wurzeln einer Gleichung, (nämlich $+a, -a, +b, -c$, oder $+2, -3, +5$, u.s.w.) allesammt als Factoren in der letzten oder ganz bekannten Grösse, als in ihrem Producte enthalten sind, (§. 149.) so lassen sich einige Wurzeln, besonders wenn sie totale Rationalzahlen sind, leicht finden, wenn man jeden angemeßnen Factor der letzten bekannten Grösse, als eine vermuthliche Wurzel versucht. Und selten hat man den Zweck, alle erdenkliche Wurzeln einer Gleichung zu erforschen; sondern nur die möglichen, oder sogar nur die rationalen, oder sogar nur die positiven. Z. E. Es sey die Gleichung $5X^3 - 2X^2 + 6X - 135$, oder $X^3 - \frac{2}{5}X^2 + 1\frac{1}{5}X - 27$. Weiß man, daß die zweckmässige Wurzel rational und total sey: so findet man leicht die Wurzel 3, weil 27, nur in 3 und 9 zerfällt wird. Wäre die Gleichung $X^3 - \frac{2}{5}X^2 + \frac{2}{5}X - 27\frac{3}{5}$, oder $5X^3 - 2X^2 + 7X - 138$: so sucht man die positive Totalwurzel, (wenn man weiß, daß eine da sey,) nachdem man zuvor die Gränzen der Wurzeln (§.82.) gefunden hat.

5.) Es läßt sich aber auch eine jede hohe Gleichung, welche viele Wurzeln hat, in einige weniger zusammen gesetzte auflösen. Z. E. eine von der 5ten Höhe, worinnen X^5 die höchste Potenz ist,

ist, in eine cubische und quadratische. Wenn man eine derselben erst weiß, und die Gleichung dadurch dividirt; so ist die andre, der Quotient. Z. E. die Gleichung

$$X^5 + 3X^4 - 29X^3 + 9X^2 + 100X - 84 = 0.$$

zerfällt in die Gleichungen

$$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = 0$$

und $X^2 + 6X + 14 = 0.$

Aber, es ist oft sehr schwer, einen solchen Divisor, oder eine der ersten Gleichung G angemeßne und weniger zusammengesetzte, Gleichung zu finden, durch welche man dividiren könnte. (Die Hülfsmittel, eine solche zum Divisor geschickte Rationalgleichung, wenn eine möglich ist, zu finden, sehe man in Segn. Anal Finit. §. 544. sq.).

§. 153.

No. 1.) Aber eine Hauptsache, wovon ich oben (§. 82.) nur wenig gesagt habe, ist, die Gränzen, oder die kleinste und größte Zahl (eine grössere Minuszahl aber heißt kleiner, als eine kleinere) zu finden, zwischen welche alle Wurzeln einer Gleichung zwischenfallen; und diese Gränzen nicht zu sehr erweitert zu setzen. Es sey die Gleichung L diese:

$$X^3 - 4X^2 - 31X + 70 = 0.$$

(Ihre Wurzeln können seyn, 2, 7 und — 5). Gesetzt, wir wollten die Wurzeln suchen, und zwar an-

anfangs nur die positiven: so ist (in diesem und in andern Fällen) klar, daß wir X ansehen können, als z + P, wobey wir aber P so groß, z so klein, als nach der Wahrheit der Gleichung angeht, (doch z nicht als eine Minuszahl) setzen wollen. Ferner, daß, wenn wir das größte P finden, welches zu dem kleinsten positiven z addirt, die Grösse des X nicht übersteigt, daß, sage ich, X nicht viel grösser seyn dürfe, als ein solches P. Man verwandle also die Gleichung L so, daß man z + P für X einführe; so wird

$$\begin{array}{rcl} X^3 & = & z^3 + 3Pz^2 + 3P^2z + P^3 \\ -4X^2 & = & \ldots -4z^2 - 8Pz - 4P^2 \\ -31X & = & \ldots\ldots -31z - 31P \\ +70 & = & \ldots\ldots\ldots\ldots +70. \end{array}$$

Die Summe dieser Glieder ist = 0,

weil sie übereinstimmt mit der Summe der Glieder in der Gleichung L. Wählen wir ein solches P, daß alle Glieder dieser Summe das Pluszeichen bekommen: so ist (§. 151.) allenthalben eine einförmige Zeichenfolge, und jede Wurzel, welche man unter z verstehn darf, ist negativ. Oder kurz, alsdann ist z negativ, und (da z + P = X seyn soll) P grösser als z. (Denn alsdann muß man eigentlich setzen — z + P = X, oder X = P — z.) Alsdann aber erhellet auch, daß wir X nicht so groß, als das angenommne P ist, in der Gleichung L annehmen dürfen; und wenn wir nun das kleinste P, das aber, um X zu seyn, nach dieser Regel schon zu groß ist, suchen: so finden wir ziemlich genau die

Gränze der positiven Grösse der Wurzel des x in der Gleichung L. Nun wird man finden, daß man P wenigstens so groß (wenn es zu groß seyn soll) annehmen müsse, daß $P^3 + 70 > 4P^2 + 31P$. Denn sonst bekäme das letzte Glied in obiger Summe kein Pluszeichen, welches doch seyn soll, damit allenthalben eine einförmige Zeichenfolge werde. Also $P^3 - 4P^2 - 31P > (-70)$. (Man merke, daß eine kleinere Minuszahl etwas Grössers, oder etwas nicht so Kleines heisse, als eine größre Minuszahl.) Nehmen wir P als 8 an; so ist $8^3 - 4.8^2 - 31.8 = 8$; folglich noch viel grösser, als -70. Weil wir nun das kleinste P suchen, das noch zu groß ist; so wollen wir den Versuch mit 6 machen. $6^3 - 4.6^2 - 31.6 (= -113) > -70$. Also ist P oder x, als 6 angenommen, noch nicht zu groß. Aber nimmt man P als 8 an; so wird die Summe jener Glieder folgende:

$$+z^3 + 20z^2 + 97z + 78.$$

Alsdann ist z negativ, folglich P grösser, als x; folglich ist 8 die Gränze der Grösse. Nimmt man aber zufälliger Weise P als 7; so ist jene Summe der Glieder:

$$z^3 + 17z^2 + 60z = 0.$$

Da nun dieses auch wahr ist, wenn man $z = 0$ setzt: so kann man, falls man P als 7 setzt, annehmen, $x = P + z = 7 + 0$. Alsdann ist P nicht nur die Gränze der Grösse aller Wurzeln des x, sondern die größte Wurzel selbst.

No. 2.

No. 2.) Will man auch die Gränzen der Minusgrösse, oder der negativen Grösse wissen, ausser welchen die Wurzeln einer Gleichung nicht seyn können: so setze man abermals, um die Gleichung L zu verwandeln, $x = z + P$; aber man denke P als negativ, oder setze vielmehr $x = z - P$. (Denn hier in diesem Falle wird auch sogar x und z als negativ angesehn, obgleich nicht so ausgedrückt, weil ja die Frage von negativen Wurzeln ist.) Wählt man alsdann P in $-P$ so groß, daß lauter zweyförmige Zeichenfolgen in der neuen Gleichung entstehn, daß folglich (§. 51.) z nur positiv seyn kann; so hat P, oder das dafür Gewählte, zu viel negative Zahlgrösse, um in der Gleichung L für x gebraucht zu werden, weil durch den Zusatz eines positiven z etwas abgehn muß. Wenn man nun in diesem Falle abermals das kleinste P unter denen, die noch zu groß sind, wählt: so hat man die Gränze der negativen Wurzeln; und wenn durch das gewählte P das z in Nulle verwandelt würde: so wäre ein solches P selbst die äusserste negative Wurzel in der Gleichung L. Es kann aber z (nach der Wahrheit der Gleichung L) Nulle werden, wenn man $-P$ als -5 annimmt. Darum ist -5 die höchste, (und, weil nur eine einzige einförmige Zeichenfolge in L ist,) auch die einzige negative Wurzel.

No. 3.) Wenn eine Zahl, die wir a nennen wollen, eine Wurzel der Gleichung L ist: so hat man keine Wurzel, wofern man a durch d um etwas

weniges vergrössert oder verringert; das ist, als-dann ist $a + d$, oder $a - d$, keine Wurzel, (wenn man d klein genug annimmt) weil eine Wurzel von der andern verschieden ist, und eine jede von der andern um eine bestimmte Grösse absteht. Die Gleichung L z. E. mag dießmal seyn:

$$x^3 - 10\,x^2 - 130\,x + 850 = 0.$$

Man sucht die Wurzeln; folglich zuerst (nach No. 1. und 2.) die Gränzen. Diese findet man — 11, und + 15, und man weiß (§. 151.) aus der Zeichenfolge, daß der Wurzeln eine negativ, zwey aber positiv sind. Man fange von der Minusgränze an, und sehe, ob etwa (da — 11 zu viel Minusgrösse hat) — 10 eine Wurzel sey. In dieser Absicht berechne man die Gleichung, (nämlich, was für ein Y sie anstatt der Nulle geben würde) sowohl, wenn man x in — 11, als in — 10 verwandelte.

x als — 11, giebt ein $Y = -\ 261$

x als — 10, giebt ein $Y = +\ 150$

Läßt man also die Minusgrösse der Wurzel von — 11 bis in — 10 abnehmen; so legt die Gleichung den Weg von einer negativen Zahl — 261, in eine positive, in + 150, zurück. Zwischen — 11 und — 10 kann man sich eine unendliche Menge Brüche denken. Z. E. — 11 . . . — 10 $\frac{999}{1000}$, — 10 $\frac{998}{1000}$ .... — 10 $\frac{1}{1000}$ ... — 10 $\frac{1}{1000000}$ — 10 $\frac{1}{10000000}$ .... — 10. Auch hat der Weg, den die Gleichung (indem x von — 11 bis in — 10 gieng) zurück legte, nämlich von — 261 zu + 150, viele

viele kleine Theile, z. E. — 261, — 260 . . . — 200 . . — 100 . . . — 1 — $\frac{1}{1000000}$ . . . . . . $\pm$ 0 . . . . + 1 . . . + 140 . . . . + 150. Kurz, man kann dem nach und nach verwandelten x so viele Schritte beymessen, als dem Y, das ist, dem, was die Gleichung L wird. Durch irgend einen Schritt des x, kömmt Y in Nulle, und durch eben diese Schritte kömmt x in die wahre negative Wurzelgrösse, weil die Gleichung L sagt, daß, wenn man die rechte Wurzel für x setzt, Y Nulle wird. Also hat man entdeckt, daß die äusserste (und in diesem Falle die einzige) negative Wurzel zwischen — 11 und — 10 falle. Mehr negative Wurzeln darf man also in diesem Falle nicht versuchen; man springe also bis zur Probe, was Y werde, wenn x positive Wurzeln bedeutet. Man thut am besten, von der äussersten Gränze anzufangen.

x als + 15 giebt ein Y = + 25
x als + 10 giebt ein Y = — 450
x als + 5 giebt ein Y = + 75

Also sind, aus dem vorhin gesagten Grund, die beyden positiven Wurzeln zwischen + 15 und + 10; und zwischen + 10 und + 5. Man versucht aber nicht jede Zwischengrösse bey Bestimmung der Bedeutung des x; sondern man macht (nach Vermuthung) Sprünge, z. E. von + 15 in + 10. Wenn diese Sprünge zu groß sind: so kann man freylich von Plus in Plus, oder von Minus in Minus springen, und die Wurzel dennoch überspringen, wie

 geschehn

geschehn seyn würde, wenn man alsobald von + 15 in + 5 gesprungen wäre, weil in jenem Falle Y = + 25, in diesem Falle Y = + 75 würde. Wenn man also durch die gemachten Sprünge nicht oft genug (nach der schon bekannten Anzahl der Wurzeln,) von Plus in Minus, oder von Minus in Plus, mit dem Betrag der Gleichung (oder mit Y) kömmt: so ist dieses ein Zeichen, daß man seine Sprünge oder Schritte kleiner machen müsse. Durch diese Mittel also nähern wir uns den Wurzeln, so, daß wir wenigstens wissen, die Wurzel, die wir jedesmal suchen, sey zwischen zweyen bekannten, nicht gar weit von einander entfernten Zahlen, zwischen g, der grössern, und k, der kleinern.

§. 154.

W aber, die noch unbekannte Wurzel, suchen wir zwischen g, und k, zwischen der zu grossen und zu kleinen Bedeutung des X, in unserm Falle zwischen 10 und 5. (Man sehe §. 153. No. 3.) Der Betrag der Gleichung, oder Y, in Voraussetzung, daß X = g = 10 sey, war — 450. Die Grösse dieses Schritts, welchen Y über die Nulle in die Minuszahlen hineingemacht hat, wollen wir h nennen. Hingegen war Y, bey der zweyten Voraussetzung, das X = 5 = k

sey,)

seyn,) ich sage, es war $Y = + 75$. Diesen Schritt über die Nulle hinaus in die Pluszahlen, wollen wir l nennen. Ich sage, die Entfernungen des w von g und von k stehen in Proportion mit h und l, (obgleich diese Proportion nicht ganz angemessen ist). Denn je weiter g und k von w abweichen, desto weiter muß ihr jedesmaliger Betrag, den sie in der Gleichung verursachen, von Nulle abweichen. Also setzen wir anfangs, als wenn die Proportion anpassend wäre:

$g - w : w - k = h : l$	$10 - w : w - 5 = 450 : 75$
$gl - wl = wh - kh$	$750 - 75w = 450w - 2250$
$gl + kh = w(h + l)$	$750 + 2250 = (450 + 75)w$
$\frac{gl + kh}{h + l} = w$	$\frac{750 + 2250}{450 + 75} = w = 5,7 \ldots$

Oder in Worten: Eine ziemlich genaue Wurzel ist der Quotient, wenn man dividirt durch die Summe der Abweichungen von Nulle; (das ist, durch die Summe dessen, was sowohl die zu grosse, als die zu kleine Zahl in die Stelle der Nulle setzt;) ich sage, wenn man dadurch dividirt eine andre Summe, welche aus 2 Producten besteht; aus dem ersten, deren Factoren sind 1) die zu grosse Zahl, 2) der durch die zu kleine Zahl in der Gleichung

chung verursachte Betrag; **aus dem zweyten Producte**, deren Factoren sind 1) die zu kleine Zahl, 2) der durch die zu grosse Zahl verursachte Betrag der Gleichung. Dieser Regel folgt man jedesmal, um zwischen g und k die mittlere Zahl zu finden, welche w, oder eine Wurzel ist.

Das in unserm Exempel so gefundene aber nicht ganz richtige w zwischen 15 und 10 (oder die andre so gefundne positive Wurzel) ist 14,7. Es ist aber dieses w zu klein, weil, wenn man es in der Gleichung (welche war $x^3 - 10x^2 - 130x + 850 = 0$) anstatt des x setzt, der Betrag oder y nicht Nulle, sondern — 45,377 wird. Da nun das durch die zu grosse Zahl 15 gewirkte $y = 25$ war; so ist unser gefundenes w (nämlich 14,7) in seiner Wirkung, die Nulle überhüpft und zu klein. Um dieses w also zu berichtigen; bleibt 15 unser g, oder die zu grosse Zahl; 14,7 aber wird unser k, oder die zu kleine Zahl. Ferner unser h (oder das durch g gewirkte y) wird 25, unser l aber (oder das durch k gewirkte y) wird 45,377, damit wir nach der gegebnen Regel ($w = \frac{gl + kh}{h + l}$) ein neues w, welches der gesuchten Wurzel näher kömmt, finden können. Dieses w wird alsdann seyn 14,89, und ist angemessen gnug.